Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. Wolfgang König
Dr. Wolfgang Quapp
Dipl.-Math. Sven Hofmann

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 13

Abgabe am 14. bzw. 15. Juli 2005

Aufgabe 13.1 (4 Punkte) — Seien $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega', \mathcal{F}')$ ein Messraum. Sei weiter $f\colon \Omega \to \Omega'$ eine $\mathcal{F}$–$\mathcal{F}'$–messbare Abbildung. Beweisen Sie:

(i) μ ist endlich genau dann, wenn $\mu \circ f^{-1}$ endlich ist.
(ii) Ist $\mu \circ f^{-1}$ σ–endlich, so ist auch μ σ–endlich.
(iii) Die Umkehrung in (ii) ist i. Allg. falsch.

Aufgabe 13.2 (4 Punkte) — Seien μ und ν Maße und sei $\varphi = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$. Beweisen Sie:

(i) $\varphi > 0$ ν-f.ü.
(ii) Ist $\nu \leq \mu$, so gilt $\varphi \leq 1$ ν-f.ü.

Aufgabe 13.3 (4 Punkte) — Für $n \in \mathbb{N}$ seien

$$E_n := \bigcup_{c_1,\dots,c_n \in \{0,2\}} \Big[\sum_{k=1}^n \frac{c_k}{3^k}, \frac{1}{3^n} + \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{3^k}\Big]$$

und

$$f_n(x) := \Big(\frac{3}{2}\Big)^n \int_0^x \mathbb{1}_{E_n}(t)\,\lambda(\mathrm{d}t), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin sei $E := \cap_{n\in\mathbb{N}} E_n$, und λ bezeichne das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$. Zeigen Sie:

(i) E ist eine kompakte, überabzählbare λ-Nullmenge.

Tipp: Zeigen Sie, dass die Mengen E_n fallend ineinander enthalten sind.

(ii) Die Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine stetige, monotone Funktion $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ und $F'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus E$.

Tipp: Finden Sie eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f_{n+1}\|_\infty \leq M2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkungen:

(i) Das sogenannte *Cantorsche Diskontinuum* E entsteht aus $[0,1]$ durch sukzessives Wegnehmen der jeweiligen mittleren Drittel der Teilintervalle.

(ii) Für die Funktion F gilt *nicht* für alle $a, x \in \mathbb{R}$ die Formel

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F'(t)\,\lambda(\mathrm{d}t).$$

Aufgabe 13.4 (4 Punkte) — Seien $\mathcal{B}_{[0,1]}$ die Spur-Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$ und λ das Lebesgue-Maß auf $([0,1], \mathcal{B}_{[0,1]})$. Sei $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $\int \psi \mathbb{1}_{[a,b]}\,\mathrm{d}\lambda = 0$ für alle $0 \leq a < b \leq 1$. Zeigen Sie, dass λ-fast überall gilt: $\psi = 0$.
Tipp: Betrachten Sie ein geeignetes Dynkin-System.