Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 12

Abgabe in den Übungen vom 23. und 24. Januar 2006

AUFGABE 12.1 Es sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{1,2\}$ und $I = \{1, \dots, N\}$. Weiter sei für $a, b, c \in I$

$$p(a,b,c) := \begin{cases} 1, & \text{falls } a = b = c, \\ \frac{1}{N-2}, & \text{falls } \#\{a,b,c\} = 3, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ einen Markovkern K_n von I^n nach I durch

$$K_n\big((i_1, \dots, i_n),\ i_{n+1}\big) := p(i_{n-1},\ i_n,\ i_{n+1}), \qquad i_1, \dots, i_{n+1} \in I.$$

Es sei Q_1 die Gleichverteilung auf I sowie $Q_2 := Q_1 \otimes Q_1$ und $Q_{n+1} := Q_n \otimes K_n$ für $n \geq 2$. Nach dem Satz von Ionescu Tulcea gibt es einen stochastischen Prozess $(X_n)_n$, dessen endlich dimensionale Verteilungen die Q_n sind. Zeigen Sie:

(i) $(X_n)_n$ ist stationär.

(ii) $(X_n)_n$ ist keine Markovkette.

(iii) $\big((X_n,\ X_{n+1})\big)_n$ ist eine Markovkette auf $I \times I$.

4 Punkte

AUFGABE 12.2 Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0,1],\ \mathcal{B}_{[0,1]})$ und $T(x) := x^2$ für $x \in [0,1]$. Zeigen Sie, dass T genau dann Maß erhaltend ist, wenn $\mathbb{P}(\{0,1\}) = 1$ gilt.

Tipp zu „$\Rightarrow$“: Betrachten Sie $\mathbb{P} \circ T^{-n}([x,1])$ für $x \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$.

4 Punkte

AUFGABE 12.3 (i) Eine Maß erhaltende Transformation T auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ heißt *schwach mischend,* falls

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \mathbb{P}(A \cap T^{-j}B) = \mathbb{P}(A) \cdot P(B), \qquad A, B \in \mathcal{F}.$$

Zeigen Sie, dass T ergodisch ist, wenn es schwach mischend ist.

(ii) Es seien $\omega^{(0)} = (0,1,0,1,\dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und $\omega^{(1)} = (1,0,1,0,\dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sowie ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$\mathbb{P} = \frac{1}{2}(\delta_{\omega^{(0)}} + \delta_{\omega^{(1)}}).$$

Zeigen Sie, dass der Verschiebungsoperator auf $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ergodisch bezüglich $\mathbb{P}$ ist und dass die terminale σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$ nicht $\mathbb{P}$-trivial ist.

4 Punkte

AUFGABE 12.4 (SATZ VON HEWITT-SAVAGE) Es sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}^{\mathbb{N}})$, so dass die Projektionen $\pi_1, \pi_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt sind. Mit $\mathfrak{S}_n$ sei die Menge der Permutationen von $1, \ldots, n$ bezeichnet. Für $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ sei $T_\sigma \colon \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ definiert durch

$$(T_\sigma(x))_j := \begin{cases} x_{\sigma(j)}, & \text{falls } j \in \{1, \ldots, n\}, \\ x_j & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass T Maß erhaltend ist und dass

$$\mathcal{C} := \{\, F \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}} \colon T_\sigma^{-1} F = F \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \sigma \in \mathfrak{S}_n \,\}$$

eine $\mathbb{P}$-triviale σ-Algebra ist. **4 Punkte**

Hinweis: Benutzen Sie Lemma 10.2.12, um ein $F \in \mathcal{C}$ mit einem Element der Algebra $\sigma(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ zu approximieren. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F)^2$ gilt.