Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 12

Abgabe am 7. bzw. 8. Juli 2005

AUFGABE 12.1 (4 Punkte) — Sei $\mathcal{B}$ die Borel–σ–Algebra auf $\mathbb{R}$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Beweisen Sie:

1. Ist f monoton, so ist f $\mathcal{B}$–$\mathcal{B}$–messbar.
2. Ist f differenzierbar mit (eventuell unstetiger) Ableitung f', so ist f' $\mathcal{B}$–$\mathcal{B}$–messbar.

AUFGABE 12.2 (4 Punkte) — Seien Ω_1 und Ω_2 zwei nichtleere Mengen, $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ eine Abbildung und $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$ ein Mengensystem. Beweisen Sie, dass

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

AUFGABE 12.3 (4 Punkte) — Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum.

1. Zeigen Sie, dass
$$\overline{\mathcal{F}} = \{\, A \cup N \colon A \in \mathcal{F},\ N \subset \Omega \text{ Nullmenge} \,\}$$
eine σ–Algebra ist.
2. Es sei weiter $\overline{\mu}\colon \overline{\mathcal{F}} \to [0, \infty]$ definiert durch $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{F}$ und alle Nullmengen $N \subset \Omega$. Zeigen Sie, dass $\overline{\mu}$ ein wohldefiniertes Maß auf $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$ ist, das μ fortsetzt.

Hinweis: Der Maßraum $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$ heißt die *Vervollständigung* von $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$.

AUFGABE 12.4 (4 Punkte) — Es seien $(\Omega, \mathcal{F})$ ein messbarer Raum, $f\colon \Omega \to [0, \infty]$ eine nichtnegative Funktion und $A := \{\, (\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} \colon 0 < y < f(\omega) \,\}$. Zeigen Sie:

$$f \text{ ist } \mathcal{F}\text{–}\mathcal{B}\text{-messbar} \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \in \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{B}).$$

Tips: „$\Rightarrow$“: Betrachten Sie $A_t := \{\, \omega \in \Omega \colon f(\omega) > t \,\} \times (0, t)$ für $t \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$.
„$\Leftarrow$“: Betrachten Sie Schnitte von $\mathbb{1}_A$.