

## Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 12

Abgabe am 7. bzw. 8. Juli 2005

AUFGABE 12.1 (4 Punkte) — Sei  $\mathcal{B}$  die Borel- $\sigma$ -Algebra auf  $\mathbb{R}$  und sei  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Abbildung. Beweisen Sie:

1. Ist  $f$  monoton, so ist  $f$   $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.
2. Ist  $f$  differenzierbar mit (eventuell unstetiger) Ableitung  $f'$ , so ist  $f'$   $\mathcal{B}$ - $\mathcal{B}$ -messbar.

AUFGABE 12.2 (4 Punkte) — Seien  $\Omega_1$  und  $\Omega_2$  zwei nichtleere Mengen,  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  eine Abbildung und  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(\Omega_2)$  ein Mengensystem. Beweisen Sie, dass

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

AUFGABE 12.3 (4 Punkte) — Sei  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ein Maßraum.

1. Zeigen Sie, dass

$$\overline{\mathcal{F}} = \{ A \cup N : A \in \mathcal{F}, N \subset \Omega \text{ Nullmenge} \}$$

eine  $\sigma$ -Algebra ist.

2. Es sei weiter  $\overline{\mu}: \overline{\mathcal{F}} \rightarrow [0, \infty]$  definiert durch  $\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{F}$  und alle Nullmengen  $N \subset \Omega$ . Zeigen Sie, dass  $\overline{\mu}$  ein wohldefiniertes Maß auf  $(\Omega, \overline{\mathcal{F}})$  ist, das  $\mu$  fortsetzt.

*Hinweis:* Der Maßraum  $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$  heißt die *Vervollständigung* von  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ .

AUFGABE 12.4 (4 Punkte) — Es seien  $(\Omega, \mathcal{F})$  ein messbarer Raum,  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  eine nichtnegative Funktion und  $A := \{ (\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{R} : 0 < y < f(\omega) \}$ . Zeigen Sie:

$$f \text{ ist } \mathcal{F}\text{-}\mathcal{B}\text{-messbar} \iff A \in \sigma(\mathcal{F} \times \mathcal{B}).$$

*Tips:* „ $\Rightarrow$ “: Betrachten Sie  $A_t := \{ \omega \in \Omega : f(\omega) > t \} \times (0, t)$  für  $t \in \mathbb{Q} \cap (0, \infty)$ .

„ $\Leftarrow$ “: Betrachten Sie Schnitte von  $\mathbb{1}_A$ .