Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. Wolfgang König
Dr. Wolfgang Quapp
Dipl.-Math. Sven Hofmann

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 11

Abgabe am 30. Juni bzw. 1. Juli 2005

Aufgabe 11.1 (4 Punkte) — Seien Ω und Ω' beliebige Mengen und sei $f\colon \Omega \to \Omega'$. Beweisen oder widerlegen Sie:

1. Ist $\mathcal{F}'$ eine σ-Algebra über Ω', so ist $f^{-1}(\mathcal{F}') = \{f^{-1}(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra über Ω.
2. Ist $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra über Ω, so ist $f(\mathcal{F}) = \{f(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$ eine σ-Algebra über Ω'.

Aufgabe 11.2 (4 Punkte) — Sei zu $n \in \mathbb{N}$ das Mengensystem $\mathcal{E}_n = \{\{1\}, \dots, \{n\}\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben, und sei $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{E}_n)$ die von $\mathcal{E}_n$ über $\mathbb{N}$ erzeugte σ–Algebra. Zeigen Sie:

1. $\mathcal{F}_n = \{\, A \subset \mathbb{N} : A \subset \{1, \dots, n\} \text{ oder } \{n+1, n+2, \dots\} \subset A \,\}$,
2. $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$,
3. $\cup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ ist keine σ–Algebra über $\mathbb{N}$.

Aufgabe 11.3 (4 Punkte) — Sei $\mathcal{B}_n$ die Borel–σ–Algebra auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

1. $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{K})$, wobei $\mathcal{K} = \{\, K \subset \mathbb{R}^n \colon K \text{ kompakt} \,\}$.
2. $\mathcal{B}_n = \sigma(\{\, (-\infty, b_1] \times \ldots \times (-\infty, b_n] : b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q} \,\})$.

Aufgabe 11.4 (4 Punkte) — Es sei $\Omega = \mathbb{N}$ und $\mathcal{F} := \{\, A \subset \mathbb{N}\colon A \text{ oder } A^{\mathrm{c}} \text{ ist endlich} \,\}$. Ferner sei $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ für alle $A \in \mathcal{F}$ definiert durch

$$\mu(A) = \begin{cases} \infty, & \text{falls } A \text{ unendlich,} \\ 0, & \text{falls } A \text{ endlich.} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F}$ eine Algebra und μ ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{F}$ ist.
2. Ist μ σ-additiv?
3. Ist μ stetig in $\emptyset$?
4. Lässt sich μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{F})$ fortsetzen?

Achtung, Korrektur: Die Vorlesung vom Donnerstag, dem 14. Juli, fällt wegen des Sommerfestes aus und wird am Mittwoch, dem 13. Juli, von 17:00 bis 18:30 Uhr, im **Ch Ex (Johannisstr. 29)**, dem Saal der **Donnerstags**vorlesungen, vorgezogen.