Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2005

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. WOLFGANG QUAPP
Dipl.-Math. SVEN HOFMANN

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 10

Abgabe am 23. bzw. 24. Juni 2005

AUFGABE 10.1 (4 Punkte) — Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit dem selben Erwartungswert $\mathbb{E}(X_n) = E$ und $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$ für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $|i-j| > m$ für ein $m \in \mathbb{N}$. Ferner existieren Konstanten $C > 0$ und $\beta < 1$ mit $\mathbb{V}(X_n) \le Cn^\beta$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für jedes $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\tfrac{1}{n} S_n - E| \ge \varepsilon) = 0,$$

wobei $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

AUFGABE 10.2 (4 Punkte) — Zeigen Sie durch Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes (Satz 5.2.2) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$

AUFGABE 10.3 (4 Punkte) — In Phantasia kommt es zur Stichwahl zwischen den Kandidaten A und B. Kandidat A hat 1500 treue Anhänger, Kandidat B ist sich der Stimmen seiner 500 Gefolgsleute sicher. Die restlichen 998 000 Wahlberechtigten stimmen unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit für Kandidat A bzw. B. Schätzen Sie durch Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass Kandidat A die Stichwahl gewinnt.

AUFGABE 10.4 (4 Punkte) — Es sei φ die Dichte und Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Beweisen Sie für alle $a > 0$ die Abschätzungen

$$\frac{a}{1+a^2}\varphi(a) \le 1 - \Phi(a) \le \frac{1}{a}\varphi(a).$$

Organisatorische Information: Die Vorlesung vom Donnerstag, dem 14. Juli, fällt wegen des Sommerfestes aus und wird am Mittwoch, dem 13. Juli, von 17:00 bis 18:30 Uhr, im Ch H4 (Linnéstr. 2), dem Saal der Mittwochsvorlesungen, vorgezogen.