Konvergenz des Punktprozesses der Signalstärken

Jasper Müller

Technische Universität Berlin

14.07.2015

Modell

- Beobachter im Ursprung von $\mathbb{R}^d$
- Transmitter $\xi = \{x_i : i \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$
- die Signalstärke des Transmitters x_i ist gegeben, durch

$$P_i = l(x_i)S_i =: \frac{S_i}{g(x_i)}$$

- wobei $\{S\}_{i\in\mathbb{N}}$ ein Folge von positiven i.i.d. Zufallsvariablen und $l(x)$ die *path loss function* ist
- der *Propagation loss Process* ist definiert als $N = \{P_i^{-1}\}_{i\in\mathbb{N}} = \{\frac{g(x_i)}{S_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$

Konvergenz Theorem

Theorem

Sei $\xi \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ eine lokal endliche Menge von Punkten, sodass es eine nicht fallende Funktion D gibt, für die

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|\xi|(r)}{D(r)} = 1 \text{ und } \lim_{r \to 0} D(r) = 0$$

fast sicher gilt. Sei außerdem $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ eine auf $\mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ positive Funktion mit $g(x) = h(|x|)$, wobei h eine linksstetige und nicht fallende Funktion ist. Sei $(S(\sigma))_{\sigma \geq 0}$ eine Familie positiver Zufallsvariablen und $N^{(\sigma)}$ der Propagation loss Process erzeugt durch $S(\sigma)$, g und ξ. Wenn

$$\text{(i) } S(\sigma) \to 0 \text{ und (ii) } \mathbb{E}[D(h^{-1}(S(\sigma)t))] \to L(t), \forall t \in C(L),$$

für $\sigma \to \infty$, wobei $C(L) := \{t \in \mathbb{R}_+^0 : \lim_{s \to t} L(s) = L(t)\}$, dann konvergiert $N^{(\sigma)}$ schwach gegen einen Poisson Prozess auf $\mathbb{R}_+^0$ mit Erwartungsmaß L.

Setup

- $\xi \subset \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ sei eine lokal endliche Menge an Punkten
- g sei eine messbare Abbildung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ nach $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$, sodass $\{g(x) : x \in \xi\}$ lokal endlich ist
- $\{S_i : i \in \mathcal{I}^\xi\}$ sei eine Folge unabhängig, identisch verteilter, positiver Zufallsvariablen
- Setze $\{Y_i\}_{i \in \mathcal{I}^\xi}$, $N = \sum_{i \in \mathcal{I}^\xi} \delta_{Y_i}$
- Für jedes Radon Maß μ and $\tau > 0$, definiere $\mu(\tau) := \mu((0, \tau])$ und $\mu|_\tau$ als das Radon Maß beschränkt auf das Intervall $(0, \tau]$
- definiere für zwei Warscheinlichkeitsmaße ν_1, ν_2 auf $(D, \mathcal{F}(D))$ $d(\nu_1, \nu_2) = \sup_{A \in \mathcal{B}(D)} |\mu_1(A) - \mu_2(A)|$
- Z sei ein Poisson Prozess mit Erwartungsmaß

$$M(t) = \sum_{i \in \mathcal{I}^\xi} \mathbb{P}\left(0 < \frac{g(x_i)}{S_i} \leq t\right)$$

Poisson Prozess Approximation

Theorem

Für jedes n, sei $\xi_n = \{x_{ni}\}_{i \in \mathcal{I}_n}$, $\mathcal{I}_n := \mathcal{I}_n^{\xi}$, S_{ni} und Y_{ni} erfüllen Setup. Definiere $N^{(n)}$ der Propagations Prozess erzeugt von den $\{Y_{ni}\}_{i \in \mathcal{I}_n}$. Wenn für alle $t \in C(L)$ gilt,

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{i \in \mathcal{I}_n} \mathbb{P}(0 < Y_{ni} \leq t) = 0 \text{ und}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E} N^{(n)}(t) = L(t),$$

dann konvergiert $N^{(n)}$ gegen einen Poisson Prozess Z^L mit Erwartungsmaß L.

Poisson Prozess Approximation

Proposition

Sei $g(x) = h(|x|)$. Dann gilt

$$M(t) := M^{\xi}(t) := \sum_{i \in \mathcal{I}^{\xi}} \mathbb{P}\left(0 < \frac{h(x_i)}{S} \leq t\right)$$
$$= \int_0^{\infty} \mathbb{P}\left(0 < \frac{h(r)}{S} \leq t\right) |\xi|(dr)$$

wenn h positiv, linksstetig und nicht fallend ist, dann gilt

$$M(t) = \mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(St))].$$

Beweis.

Es gilt,

$$|\xi|(r) = \sum_{i \in \mathcal{I}^{\xi}} \mathbb{1}_{0<|x_i|\leq r}.$$

Poisson Prozess Approximation

Daraus folgt,

$$\int_0^\infty \mathbb{P}\left(0 < \frac{h(r)}{S} \le t\right) |\xi|(dr) = \sum_{i \in \mathcal{I}^\xi} \mathbb{P}\left(0 < \frac{h(x_i)}{S} \le t\right) = M(t).$$

Mit der Inversen h^{-1} von h bekommen wir außerdem

$$\mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(St))] = \mathbb{E} \sum_{i \in \mathcal{I}^\xi} \mathbb{1}_{0 < |x_i| \le h^{-1}(St)} = \mathbb{E} \sum_{i \in \mathcal{I}^\xi} \mathbb{1}_{0 < g(|x_i|) \le St}.$$

Beweis des Konvergenz Theorems

Wir zeigen

$$\lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[D(h^{-1}(S(\sigma)t))] = \lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(St))].$$

Sei $\epsilon > 0$ und r_ϵ, sodass für $r \geq r_\epsilon$

$$1-\epsilon \leq \frac{|\xi|(r)}{D(r)} < 1+\epsilon$$

gilt. Sei F_σ die Verteilungsfunktion von $S(\sigma)$, dann haben wir

$$\begin{aligned}\limsup_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(S(\sigma)t))] &\leq \limsup_{\sigma\to\infty} \int_0^\infty |\xi|(h^{-1}(st))F_\sigma(ds)\\ &= \limsup_{\sigma\to\infty} \int_{h(r_\epsilon/t)}^\infty |\xi|(h^{-1}(st))F_\sigma(ds)\end{aligned}$$

Die Gleichheit gilt, da $S(\sigma) \to 0$ und $\lim_{y\to 0} h^{-1}(y) = 0$.

Beweis des Konvergenz Theorems

Da aus $s \geq h(r_\epsilon)/t$ folgt, dass $h^{-1}(st) \geq r_\epsilon$, gilt

$$\begin{aligned}
\limsup_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(S(\sigma)t))] &\leq (1+\epsilon) \limsup_{\sigma\to\infty} \int_{h(r_\epsilon/t)}^{\infty} D(h^{-1}(st)) F_\sigma(ds) \\
&\leq (1+\epsilon) \limsup_{\sigma\to\infty} \int_{0}^{\infty} D(h^{-1}(st)) F_\sigma(ds) \\
&= \limsup_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[D(h^{-1}(S(\sigma)t))].
\end{aligned}$$

Wir haben also

$$\limsup_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(S(\sigma)t))] \leq \lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[D(h^{-1}(S(\sigma)t))]$$

Ähnlich zeigen wir

$$\liminf_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[|\xi|(h^{-1}(S(\sigma)t))] \geq \lim_{\sigma\to\infty} \mathbb{E}[D(h^{-1}(S(\sigma)t))]$$

Zufällige Transmitter Positionen

Wir ersetzen ξ durch einen Prozess $\Xi = \sum_{i \in \mathcal{I}^{\Xi}} \delta_{X_i}$.

Theorem

Sei Θ ein Poisson Prozess auf $\mathbb{R}^d$ unabhängig von $S_i : i \in \mathbb{N}$ und definiere $Z = \sum_{\theta_i \in \Theta} \delta_{g(\theta_i)/S_i}$. Dann ist Z ein Poisson Prozess mit Erwartungsmaß

$$M(t) = \mathbb{E}Z(t) = \mathbb{E} \int \mathbb{P}\left(0 < \frac{g(\theta)}{S} \leq t\right) \Theta(d\theta)$$

und

$$d(\mathcal{L}(Z|_\tau), \mathcal{L}(N|_\tau)) \leq d(\mathcal{L}(\Theta), \mathcal{L}(\Xi)).$$

Zufällige Transmitter Positionen

Theorem

Definiere

$$M^{\Xi}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}\left(0 < \frac{g(x)}{S} \leq t\right) \Xi(dx).$$

Sei Z ein Cox Prozess gerichtet vom Maß M^{Ξ}, das heißt Z ist, bedingt auf Ξ, ein Poisson Prozess mit Erwartungsmaß M^{Ξ}. Dann gilt

$$d(\mathcal{L}(Z|_\tau), \mathcal{L}(N|_\tau)) \leq \mathbb{E} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}\left(0 < \frac{g(x)}{S} \leq \tau\right)^2 \Xi(dx).$$

Poisson/Cox

Theorem

Sei Ξ ein Prozess auf $\mathbb{R}^d$ mit lokal endlichem Erwartungsmaß Λ, sodass $\lim_{r\to 0}|\Lambda|(r) = 0$ und für $r \to \infty$,

$$|\Lambda|(r) \to \infty, \ \frac{Var(|\Xi|(r))}{(|\Lambda|(r))^2} \to 0.$$

Sei $(S(\sigma))_{\sigma\geq 0}$ eine Familie positiver Zufallsvariablen und $N^{(\sigma)}$ der Propagation loss Process erzeugt durch $S(\sigma)$, g und Ξ. Sei außerdem $g(x) = h(|x|)$, wobei h eine linksstetige, nicht fallende, positive Funktion auf $\mathbb{R}_+^0$ ist. Wenn

$$\text{(i) } S(\sigma) \to 0 \text{ und (ii) } \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}\left(0 < \frac{g(x)}{S(\sigma)} \leq t\right) \Lambda(dx) \to L(t), \forall t \in C(L)$$

für $\sigma \to \infty$, dann konvergiert $N^{(\sigma)}$ schwach gegen einen Poisson Prozess Z^L mit Erwartungsmaß L.