

# Optimales Routing

Paul Kunze

10.07.2015

# Grundlagen

# Grundlagen

- ▶ endliche Menge an Punkten  $\Phi = \{x_i\}$  aus  $\mathbb{R}^2$
- ▶ hier: gebildet durch Poisson-Punktprozess
- ▶  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_D$ : Route zum Ziel  $D \in \Phi$ . Abbildung auf einem Graphen  $\Phi$ , die jedem Punkt einen Nachfolger zuordnet mit den Eigenschaften:
  - $\mathcal{A}(D) = D$
  - für alle  $x \in \Phi$ :  $\mathcal{A}^h(x) = D$  für ein endliches  $h = h(x) \geq 1$
- ▶  $\mathcal{G} = (\Phi, \mathcal{E})$  Graph, wobei  $\mathcal{E} \subset \Phi \times \Phi$  die Menge der ungerichteten Kanten ist

# Gewichte

- ▶  $\omega(x, y)$ : nicht-negative Gewichtsfunktion, die jeder Kante  $(x, y) \in \mathcal{E}$  einen Wert zuordnet
- ▶ Bsp.: - Euklidische Distanz:  $\omega(x, y) = \omega_{Eukl}(x, y) = |x - y|$   
- Zufällige Gewichte:  $\omega(x, y) = \omega(y, x)$  sind u.i.v. Zufallsvariablen

# optimale Pfade

- ▶ Menge aller Pfade  $\pi$  von  $\mathcal{G} = (\Phi, \mathcal{E})$  zwischen  $S$  und  $D$
- ▶ jeder ist von der Form  $x_1 = S, \dots, x_n = D$  für ein  $n \in \mathbb{N}$
- ▶ das Gewicht von  $\pi$  ist definiert als  $|\pi| = \sum_{i=1}^{n-1} \omega(x_i, x_{i+1})$
- ▶ sei  $p^*(S, D)$  der Pfad mit dem minimalen Gewicht
- ▶ dieser ist weder stets eindeutig noch ist die Existenz gesichert
- ▶ um die Wohldefiniertheit aller künftigen Objekte zu gewährleisten, nehmen wir an, dass Perkolation vorliegt, d.h. dass es stets einen Pfad zwischen zwei beliebigen Punkten gibt

# Asymptotische Eigenschaften des MWR

# Fragestellung

- ▶ Welche Voraussetzungen müssen Graphen erfüllen, damit der Routendurchschnitt endlich bleibt?
- ▶ Genauer: Betrachtung des Verhaltens des Gewichts eines optimalen Pfades zwischen zwei typischen Punkten einer Menge, wenn die euklidische Entfernung zwischen ihnen ins Unendliche wächst.
- ▶ Werkzeug: subadditiver Ergodensatz von Kingman (Verallgemeinerung des Birkhoff'schen Ergodensatzes)

# Voraussetzungen

- ▶  $\Phi$  sei ein einfacher Punktprozess.
- ▶ Der zufällige Graph  $\mathcal{G} = (\Phi, \mathcal{E})$  sei gemeinsam stationär mit Kantengewichten  $w(x_i, y_i)$ .
- ▶ D.h. die Verteilung des Tripels  $\overline{\mathcal{G}} = (\Phi, \mathcal{E}, w(\cdot))$  ist dieselbe wie die des Tripels  $\overline{\mathcal{G}} + a = (\Phi + a, \mathcal{E} + a, w(\cdot + a))$  für alle  $a \in \mathbb{R}^2$ , wobei  $(x, y) + a = (x + a, y + a)$  die Verschiebung der Kante  $(x, y) \in \mathcal{E}$  um den Vektor  $a$  ist.
- ▶ Das MWR  $\mathcal{A}^*(w, D)$  existiere fast sicher für alle Punkte  $D \in \Phi$ .



# Voraussetzungen

- ▶ typischer Punkt: der Punkt aus  $\Phi$ , der dem gewählten Punkt  $t \in \mathbb{R}^2$  am nächsten ist.
- ▶ Bezeichnung:  $x(t)$ . Die Eindeutigkeit folgt mit dem nächsten Lemma:

## Lemma

*Für einen einfachen, stationären nicht-null Punktprozess gilt:*

*$\mathbb{P}(\text{es ex. zwei oder mehr disjunkte Punkte, die äquidistant zum Ursprung } 0 \text{ sind}) = 0.$*

## Beweis.

*Siehe Lemma 4.2.2 in F. Baccelli and B. Blaszczyzyn: Stochastic Geometry and Wireless Networks, Volume I.* □

# MWR auf $\mathbb{R}^2$

## Definition

Das MWR zu  $t \in \mathbb{R}^2$ , wobei  $t$  nicht notwendigerweise ein Punkt aus  $\Phi$  sein muss, ist definiert als das MWR  $\mathcal{A}_{x(t)}^*$  zu dem Punkt  $x(t) \in \Phi$ . Dementsprechend definiert man die MWR Route  $p^*(s, t)$  von  $s \in \mathbb{R}^2$  zu  $t \in \mathbb{R}^2$  als die optimale Route  $p^*(x(s), x(t))$  von  $x(s) \in \Phi$  nach  $x(t) \in \Phi$ .

Um zu betonen, dass  $p^*(s, t)$  nicht nur durch  $x(s)$ ,  $x(t)$  und allen anderen Punkten aus  $\Phi$  von  $\overline{\mathcal{G}}$  abhängt, sondern auch von den Gewichten  $w(s, t)$ , schreiben wir auch manchmal  $p^*(s, t, \overline{\mathcal{G}})$ .

# Subadditivität des minimal gewichteten Routings

## Lemma

*Seien die MWR Routen zwischen allen Paaren von Punkten  $s, t \in \mathbb{R}^2$  fast sicher wohldefiniert. Dann gilt für alle  $s, t, v \in \mathbb{R}^2$*

$$|p^*(s, t)| \leq |p^*(s, v)| + |p^*(v, t)|.$$

## Beweis.

Ist der Punkt  $v$  bereits Teil des optimalen Pfades von  $s$  nach  $t$ , so haben wir Gleichheit. Ist er es allerdings nicht, so muss die optimale Route einen Umweg über diesen Punkt nehmen und der Pfad wird länger, sodass wir in diesem Fall (echte) Ungleichheit haben.  $\square$

# Kingmans subadditiver Ergodensatz

## Theorem

Sei  $\bar{\mathcal{G}} = (\Phi, \mathcal{E}, w)$  stationär mit nicht-negativen Gewichten  $w(\cdot, \cdot)$ .  
Weiter sei  $|p^*(x_i, x_j, \bar{\mathcal{G}})|$  fast sicher wohldefiniert für alle  $x_i, x_j \in \Phi$ .  
Dann gilt für alle Vektoren  $d \in \mathbb{R}^2$  mit  $|d|=1$ :

(i) Falls  $\mathbb{E}[|p^*(0, d, \bar{\mathcal{G}})|] < \infty$ , dann existiert der Grenzwert

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[|p^*(0, \gamma d, \bar{\mathcal{G}})|]}{\gamma} = \inf_{\gamma > 0} \frac{\mathbb{E}[|p^*(0, \gamma d, \bar{\mathcal{G}})|]}{\gamma} = \kappa_d$$

mit  $\kappa_d < \infty$ .

## Theorem (Fortsetzung)

(ii) *Ist zusätzlich*

$$\mathbb{E}\left[\sup_{\gamma_1 < \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2 \in I} |p^*(\gamma_1 d, \gamma_2 d, \overline{\mathcal{G}})|\right] < \infty$$

*für ein nicht-degeneriertes, endliches Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann existiert der Grenzwert*

$$K_d = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|p^*(0, \gamma d, \overline{\mathcal{G}})|}{\gamma}$$

*fast sicher und  $\mathbb{E}[K_d] = \kappa_d$ .*

## Bemerkung

Falls  $\bar{\mathcal{G}}$  bewegungsinvariant ist (stationär und rotationsinvariant), dann hängt die Verteilung von  $K_d$  nicht von der Richtung  $d$  ab.

# Delaunay-Zerlegungen und Voronoi-Diagramme

# Einleitung

- ▶ Delaunay Graph: Entstehung durch Triangulation einer Menge von Punkten
- ▶ Ziel: möglichst große Innenwinkel
- ▶ dazu: Verbinden der Punkte, sodass stets drei auf einem Kreis liegen und keine weiteren darin enthalten sind
- ▶ Punkte durch einen Poisson-Punktprozess gegeben, daher Poisson-Delaunay Graph
- ▶ indirekte Herleitung über Voronoi-Diagramme
- ▶ im Folgenden sei  $S \subset \mathbb{R}^2$  stets eine endliche Menge von Punkten in der Ebene (Orte)



## Definition

Die *Voronoi-Zelle*  $VR(p, S)$  eines Ortes  $p$  aus einer Menge  $S$  ist die Menge aller Punkte der Ebene, die näher zu  $p$  liegen als zu jedem anderen Ort aus  $S$ , d.h.

$$VZ(p, S) := \{x \in \mathbb{R}^2 : |p - x| < |q - x| \forall q \in S\}.$$

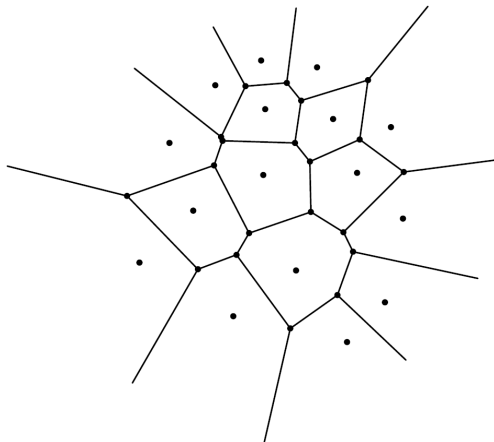
Die Menge aller Voronoi-Zellen zu Orten aus  $S$  heißt die *Voronoi-Zelle zu  $S$*  und wird mit

$$VZ(S) := \bigcup_{p \in S} D(p, S)$$

bezeichnet. Das *Voronoi-Diagramm*  $V(S)$  (oder auch *Voronoi-Graph*) einer Menge  $S$  erhält man nun durch Komplementbildung mit  $\mathbb{R}^2$ :

$$V(S) := \mathbb{R}^2 \setminus VR(S).$$

# Voronoi-Diagramm



Veranschaulichung: Orte als Restaurants mit demselben Angebot,  
Zellen als Einzugsbereich der Kunden

## Bemerkung

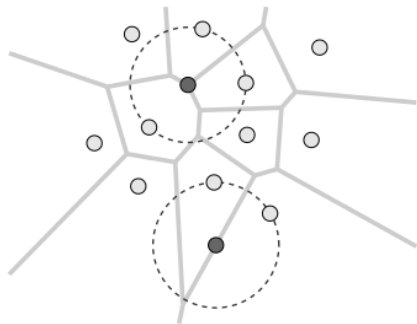
- ▶ gemeinsamer Rand von zwei benachbarten Voronoi-Zellen entweder eine Strecke oder eine Halbgerade
- ▶ alle Orte auf einer gemeinsamen Geraden  $\rightarrow$  Voronoi-Zellen sind unendliche Streifen
- ▶ bei einem Poisson-Prozess aber fast sicher nicht der Fall, daher schließen wir diesen Fall von nun an aus
- ▶ Voronoi-Diagramm
  - ▶ Kanten: Punkte gehören zu zwei benachbarten Zellen
  - ▶ Knoten: Punkte gehören zu mindesten drei benachbarten Zellen

## Lemma

Für einen Punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  sei  $K_S(p)$  bzw.  $K(p)$  der größte leere Kreis mit Mittelpunkt  $p$ , d.h. der Kreis, dessen Inneres keinen Ort aus  $S$  enthält. Für das Voronoi-Diagramm einer Menge  $S$  gilt:

- (i) Ein Punkt  $p$  ist genau dann ein Knoten des Voronoi-Diagramms, wenn  $K(p)$  mindestens drei Orte enthält.
- (ii) Ein Punkt  $p$  liegt genau dann im Inneren einer Kante des Voronoi-Diagramms, wenn  $K(p)$  genau zwei Orte enthält.

# Lemma



## Beweis.

- (i) " $\Rightarrow$ "  $p$  sei Knoten des Diagramms, d.h.  $p$  liegt im gemeinsamen Rand von drei Zellen, also von mindestens drei Orten  $s_1, \dots, s_3$  gleich weit entfernt  
Annahme: es gibt Ort  $q$  in dem Kreis um  $p$ , auf dem diese drei Orte liegen  
 $\Rightarrow q$  liegt näher an  $p \Rightarrow p$  ist kein gemeinsamer Randpunkt der Zellen von  $s_1$  bis  $s_3$   $\downarrow$   
 $\Rightarrow$  der Kreis ist also leer und identisch mit  $K(p)$   
" $\Leftarrow$ "  $K(p)$  enthalte Orte  $s_1, \dots, s_m$  mit  $m \geq 3$   
 $\Rightarrow p$  ist von jedem dieser Punkte gleich weit entfernt (alle anderen liegen weiter weg)  
 $\Rightarrow p$  liegt auf dem gemeinsamen Rand der Voronoi-Zellen von  $s_1$  bis  $s_m$
- (ii) Mit ähnlichen Argumenten wie in (i).

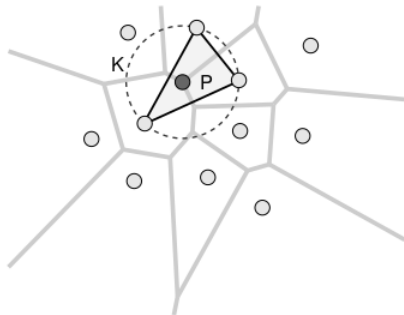


## Definition

Sei  $S$  wieder eine Menge von Orten in der Ebene.

- ▶ Liegen auf dem Rand eines leeren Kreises die Orte  $s_1, \dots, s_k$  mit  $k \geq 3$ , so heißt das eindeutig bestimmte, konvexe Polygon  $P$  mit den Ecken  $s_1$  bis  $s_k$  ein *Delaunay-Polygon* bezüglich der Menge  $S$ .
- ▶ Der Kreis  $K$  heißt der *Umkreis von  $P$*  und die Menge aller Delaunay-Polygone heißt die *Delaunay-Zerlegung zu  $S$* .

# Delaunay-Polygon P





# Zusammenhang Voronoi - Delaunay

Beobachtung: Die Umkreismittelpunkte der Delaunay-Polygone einer Menge  $S$  sind genau die Knoten des zu  $S$  gehörenden Voronoi-Diagramms.

(Das Voronoi-Diagramm und der Delaunay-Graph einer Menge sind *dual* zueinander.)

**Beweis.**

Dies ist genau die Aussage aus dem vorherigen Lemma. □

## Voronoi $\rightarrow$ Delaunay

- ▶ geg.: endlich viele Orte durch Punktprozess mit zugehörigem Voronoi-Diagramm
- ▶ Verbinden der Orte benachbarter Zellen
- ▶ Delaunay-Graph bestehend aus Dreiecken

## Delaunay $\rightarrow$ Voronoi

- ▶ geg.: endlich viele Orte durch Punktprozess mit zugehörigem Delaunay-Graphen
- ▶ Umkreismittelpunkt zu jedem Dreieck zeichnen (auch außerhalb des Dreiecks möglich)
- ▶ abgeschlossene Voronoi-Zellen: Verbinden der Umkreismittelpunkte von sich berührenden Dreiecken
- ▶ unbeschränkte Kanten: Strahl von den Mittelpunkten aus, die nur zu einer Voronoi-Zelle gehören, senkrecht zu der jeweiligen Kante des Delaunay-Graphen, die an kein weiteres Dreieck grenzt

# Anwendung von Kingman auf Delaunay-Graph

# Erinnerung Kingmans subadditiver Ergodensatz

## Theorem

$\bar{\mathcal{G}} = (\Phi, \mathcal{E}, w)$  stationär mit nicht-negativen Gewichten  $w(\cdot, \cdot)$ ,  
 $|p^*(x_i, x_j, \bar{\mathcal{G}})|$  fast sicher wohldefiniert für alle  $x_i, x_j \in \Phi$ . Dann gilt  
für alle  $d \in \mathbb{R}^2$  mit  $|d|=1$ :

(i)  $\mathbb{E}[|p^*(0, d, \bar{\mathcal{G}})|] < \infty \Rightarrow \kappa_d = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[|p^*(0, \gamma d, \bar{\mathcal{G}})|]}{\gamma} < \infty.$

(ii) Gilt zusätzlich  $\mathbb{E}[\sup_{\gamma_1 < \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2 \in I} |p^*(\gamma_1 d, \gamma_2 d, \bar{\mathcal{G}})|] < \infty$  für ein  
nicht-degeneriertes, endliches Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , dann

$K_d = \lim_{\gamma \rightarrow \infty} \frac{|p^*(0, \gamma d, \bar{\mathcal{G}})|}{\gamma} < \infty$  fast sicher und  $\mathbb{E}[K_d] = \kappa_d.$

## Theorem

Sei  $\mathcal{G}_{Del} = (\Phi, \mathcal{E}_{Del}, w)$  ein Poisson-Delaunay-Graph. Die Gewichte seien unabhängig markiert durch nicht-negative zufällige Gewichte  $w(x, y) = w(y, x)$  mit Verteilungsfunktion  $F$ . Dann erfüllt das MWR auf diesem Graphen (i) und (ii) in Kingmans subadditivem Ergodensatz genau dann mit  $0 \leq K_d = \kappa_d = \kappa < \infty$ , wenn

$$\mathbb{E}[\min(w_1, w_2, w_3)] = \int_0^{\infty} (1 - F(u))^3 du < \infty,$$

wobei  $w_i$  unabhängige Kopien des generischen Gewichts sind.

## Beweis.

Siehe *Vahidi-Asl and Wierman, 1990*. □

## Theorem

Sei  $\mathcal{G}_{Del} = (\Phi, \mathcal{E}_{Del}, w_{Eukl})$  ein Poisson-Delaunay-Graph mit euklidischen Gewichten. Der kürzeste Pfad auf diesem Graphen erfüllt (i) und (ii) in Kingmans subadditivem Ergodensatz mit

$$1 \leq K_d = \kappa_d = \kappa \leq \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)} \approx 2,42 < \infty.$$

## Lemma

Sei  $\Phi$  eine endliche Menge von Punkten in der Ebene. Für zwei beliebige Punkte  $x, y \in \Phi$  erfüllt der euklidische kürzeste Pfad  $p^*(x, y)$

$$\frac{|p^*(x, y)|}{|x - y|} \leq \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)} \approx 2,42.$$

## Beweis.

Siehe *Keil and Gurwin, 1992*. □



## Beweis Satz

Seien  $0, t \in \mathbb{R}^2$  beliebig, aber fest. Für Aussage (i) zeigen wir  $\mathbb{E}[|p^*(0, t, \overline{\mathcal{G}})|] < \infty$ . Mit

$$\frac{|p^*(0, t)|}{|x(0) - x(t)|} \leq \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)}$$

aus dem Lemma erhalten wir

$$\mathbb{E}|p^*(0, t)| \leq \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)} |x(0) - x(t)| < \infty.$$

## Fortsetzung

Für Aussage (ii) zeigen wir  $\mathbb{E}[\sup_{u < v} |p^*(u, v)|] < \infty$ .

Wir benutzen  $\sup_{s \in [0, t]} |x(0) - x(s)| \leq |t| + 2|x(t/2) - t/2|$  und die

Stationarität von  $\mathcal{G}_{Del}$  und erhalten

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sup_{s \in [0, t]} |x(0) - x(s)|\right] &\leq \mathbb{E}|t| + 2\mathbb{E}|x(t/2) - t/2| \\ &= |t| + 2\mathbb{E}|x(0)| < \infty.\end{aligned}$$

Also wissen wir, dass  $K_d = \kappa_d = \kappa$ .

## Fortsetzung

Jetzt berechnen wir die Grenzen und beginnen mit der oberen.

$$\begin{aligned}\kappa &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-1} \mathbb{E} |p^*(0, t)| \\ &\leq \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)} |t|^{-1} \mathbb{E} |x(0) - x(t)| \\ &\leq \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)} \left( \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-1} (|t| + 2\mathbb{E} |x(0)|) \right) \\ &= \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)} \left( 1 + 2 \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-1} \mathbb{E} |x(0)| \right) \\ &= \frac{2\pi}{3\cos(\pi/6)}\end{aligned}$$

## Fortsetzung

Für die untere Grenze benutzen wir folgende Ungleichungen:

(\*) Sei  $p^* = (0 = t_1, t_2, \dots, t_n = t)$  der kürzeste Weg von 0 nach  $t$  entlang des Graphen. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x(0) - x(t)| &= |x(0) - x(t_2) + x(t_2) - \dots + \dots - x(t)| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n-1} |x(t_i) - x(t_{i+1})| \\ &= |p^*(x(0), x(t))| = |p^*(0, t)| \end{aligned}$$

(\*\*) Mit der Dreiecksungleichung erhält man:

$$\begin{aligned} |t| &= |-t| = |x(t) - t + x(0) - x(t) - x(0)| \\ &\leq |x(t) - t| + |x(0) - x(t)| + |x(0)| \\ \Leftrightarrow |x(0) - x(t)| &\geq |t| - |x(0)| - |x(t) - t| \end{aligned}$$

## Fortsetzung

Nach dieser Vorarbeit bestimmen wir die untere Grenze. Dabei nutzen wir bei der ersten Ungleichung (\*), bei der zweiten (\*\*)  
und am Ende erneut die Stationarität.

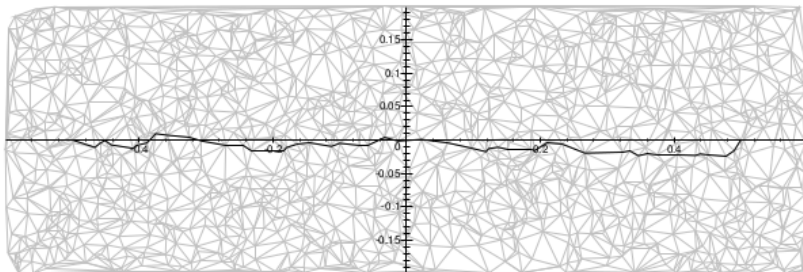
$$\begin{aligned}\kappa &= \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-1} \mathbb{E} |p^*(0, t)| \\ &\geq \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left( |t|^{-1} \mathbb{E} |x(0) - x(t)| \right) \\ &\geq \lim_{|t| \rightarrow \infty} \left( 1 - |t|^{-1} \mathbb{E} |x(0)| + |t|^{-1} \mathbb{E} |x(t) - t| \right) \\ &= 1 - 2 \lim_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{-1} \mathbb{E} |x(0)| \\ &= 1\end{aligned}$$



# Interpretation

Was sagen uns nun die berechneten Grenzen?

- ▶ günstigster Fall: genauso kurz wie der direkte Weg
- ▶ schlechtester Fall: höchstens 2,42 mal länger



Vielen Dank für die Aufmerksamkeit.

Habt ihr noch irgendwelche Fragen?