

# Das Krein-Rutman-Theorem

Florian Krellner

17. August 2016

# Inhaltsverzeichnis

1	Das Krein-Rutman-Theorem und seine Voraussetzungen	2
2	Beispiel 1: stationäre Verteilung	3
3	Beweis Krein-Rutman-Theorem	4
4	Spezialfall: das Perron-Frobenius-Theorem	8
5	Beispiel 2: Martingaleigenschaft	8

## 1 Das Krein-Rutman-Theorem und seine Voraussetzungen

Das Krein-Rutman-Theorem stellt fest, dass für kompakte positive Operatoren der Spektralradius ein Eigenwert zu einem positiven Eigenvektor ist. Ziel dieser Ausarbeitung ist es, das Theorem und seinen Beweis vorzustellen. Des Weiteren wollen wir mögliche Anwendungen des Krein-Rutman-Theorems in der Stochastik aufzeigen.

Wir werden zunächst in diesem Abschnitt das Theorem formulieren und die Voraussetzungen betrachten. Im dritten Abschnitt wird das Theorem dann bewiesen.

**Satz 1.1** (Krein-Rutman-Theorem). Sei  $X$  ein Banach-Verband und  $T : X \rightarrow X$  ein kompakter positiver Operator mit positivem Spektralradius  $r(T) > 0$ . Dann gibt es ein positives  $x \in X$  mit  $Tx = r(T)x$ .

Das Krein-Rutman-Theorem sagt also aus, dass der Spektralradius ein Eigenwert ist und dass er einen positiven Eigenvektor hat.

Eine Menge  $X$  ausgestattet mit einer partiellen Ordnung  $\leq$  wird Verband genannt, falls es zu  $a, b \in X$  genau ein kleinstes  $x \in X$  und genau ein größtes  $y \in X$  gibt, sodass  $a \leq x$  und  $b \leq x$  sowie  $y \leq a$  und  $y \leq b$  gelten. Zur Erinnerung: eine partielle Ordnung  $\leq$  auf  $X$  ist eine Relation auf  $X$  die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist, d.h. es gelten:

$$x \leq x, \quad x \leq y, y \leq x \Rightarrow y = x, \quad x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

für alle  $x, y, z \in X$ . Das kleinste Element  $x$  mit  $a \leq x$  und  $b \leq x$  wird Supremum von  $a, b$  genannt und wir setzen  $\sup\{a, b\} := x$ . Analog wird das größte Element  $y$  mit  $y \leq a$  und  $y \leq b$  Infimum von  $a, b$  genannt und wir setzen  $\inf\{a, b\} := y$ . Falls zu  $z$  auch  $-z$  existiert, ist der Betrag von  $z$  durch  $|z| := \sup\{z, -z\}$  definiert. Man beachte, dass  $a, b \mapsto \sup\{a, b\}$  bzw.  $a, b \mapsto \inf\{a, b\}$  erst dann Abbildungen sind, wenn das Supremum und das Infimum eindeutig bestimmt sind, d.h. sie sind genau dann Abbildungen wenn sie auf einem Verband betrachtet werden.

Ein Vektorraum  $X$ , der auch ein Verband ist, wird als Vektorverband bezeichnet, wenn die partielle Ordnung unter Addition und positiver Skalarmultiplikation erhalten bleibt, d.h. es gelten die folgende beiden Implikationen:

$$x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \quad x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y$$

für alle  $x, y, z$  und  $\alpha \geq 0$ .

Ein Banach-Raum, d.h. ein vollständiger und normierter Vektorraum, wird zu einem Banach-Verband, falls er ein Vektorverband ist und falls die folgende Implikation:

$$|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$$

für alle  $x, y \in X$  gilt. Diese Forderung ist eine sehr natürliche Forderung. Denn falls der Vektor  $x$  für jede Komponente näher an 0 liegt als der Vektor  $y$ , dann sollte auch der Abstand des Vektors  $x$  zu 0 geringer sein als der Abstand von  $y$  zu 0, d.h.  $\|x - 0\| \leq \|y - 0\|$ .

Ein linearer Operator bzw. eine lineare Abbildung  $T : X \rightarrow X$  ist kompakt, falls er bzw. sie jede beschränkte Teilmenge auf eine relativ kompakte Teilmenge abbildet. Eine Menge ist relativ kompakt, falls ihr Abschluss kompakt ist. Im Allgemeinen muss die Urbild- und Bildmenge von  $T$  nicht dieselbe Menge sein. Eine äquivalente Charakterisierung für einen kompakten Operator ist die folgende: Ein linearer Operator ist kompakt, falls für jede beschränkte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  eine

Teilfolge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  existiert, sodass  $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $X$  konvergiert. Letztere Charakterisierung ist die, die wir nutzen werden.

Ein positiver linearer Operator  $T : X \rightarrow X$  bildet jedes positive Element auf ein positives ab, d.h. es gilt  $Tx \geq 0$  für alle  $x \geq 0$ . Man beachte, dass  $Tx \geq 0$  für alle  $x \in X$  im Allgemeinen nicht gilt, denn für ein  $x < 0$  folgt  $T(-x) = -Tx < 0$ .

Das Spektrum eines linearen Operators  $T$  sind die komplexen Zahlen  $\lambda \in \mathbb{C}$ , welche Spektralwerte genannt werden, für welche der Operator  $\lambda Id - T$  nicht invertierbar ist. Das Spektrum ist also die folgende Menge:

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda Id - T)^{-1} \text{ existiert nicht}\}.$$

Mit  $Id : X \rightarrow X$  bezeichnen wir die Identitätsfunktion auf  $X$ . Es gilt also  $Id(x) = x$  für alle  $x \in X$ . Im Fall, dass  $X = \mathbb{R}^n$  ist, ist das Spektrum die Menge der Eigenwerte.

Für einen linearen Operator ist ein Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  mit dem Eigenvektor  $x \in X \setminus \{0\}$  genauso definiert wie für Matrizen. Damit also  $\lambda$  ein Eigenwert von  $T$  zum Eigenvektor  $x$  von  $T$  ist, muss  $Tx = \lambda x$  gelten. Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  mit den Eigenvektor  $x$  ist auch  $\alpha x$  ein Eigenvektor. Damit gilt:

$$\lambda x - Tx = 0 = \lambda(\alpha x) - T(\alpha x).$$

Deswegen ist  $\lambda Id - T$  nicht invertierbar und somit ist jeder Eigenwert auch ein Spektralwert. Die Menge der Eigenwerte bezeichnen wir mit:

$$\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) : Tx = \lambda x \text{ für ein } x \neq 0\}.$$

Sie wird auch Punktspektrum genannt.

## 2 Beispiel 1: stationäre Verteilung

Zunächst betrachten wir eine endlichdimensionale Markovkette  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^d$  mit der Übergangsmatrix  $P$ . Dann definiert  $x \mapsto P^T x$  für  $x \in \mathbb{R}^d$  einen positiven und kompakten linearen Operator auf dem Banach-Verband  $\mathbb{R}^n$  mit dem Spektralradius  $r(P) = 1$ . Damit existiert ein normiertes  $x > 0$  mit  $P^T x = x$ , d.h. die Markovkette  $X$  hat eine stationäre Verteilung.

Das obige Beispiel ist eine recht elementare Anwendung des Krein-Rutman-Theorems. Es gibt uns aber eine Idee, wie wir das Theorem auf allgemeine Markovprozesse anwenden können. Wir betrachten nun einen zeithomogenen Markovprozess  $X = (X_s)_{s \geq 0}$  auf dem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  mit der Filtration  $\mathcal{F}_s = \sigma(X_t, t \leq s) \subseteq \mathcal{F}$ . Der Markovprozess soll Werte in dem Messraum  $(E, \mathcal{E})$  annehmen. Zu dem Markovprozess betrachten wir die Anfangsverteilung  $\mu$  auf  $(E, \mathcal{E})$ , d.h. für  $\mu$  gilt  $\mu[A] = \mathbb{P}[X_0 \in A]$  für alle  $A \in \mathcal{E}$ . Zu einem Zeitpunkt  $s \geq 0$  ist die Verteilung von  $X_s$  durch den Übergangskern  $K_s : E \times \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$  charakterisiert und kann somit wie folgt angegeben werden:

$$\mathbb{P}[X_s \in A] = \int K_s(x, A) \mu[dx]$$

für  $A \in \mathcal{E}$ . Eine Verteilung  $\mu$  ist nun eine stationäre Verteilung von  $X$ , falls:

$$\mu[A] = \int K_s(x, A) \mu[dx]$$

für alle  $A \in \mathcal{E}$  und alle  $s \geq 0$  gilt.

Mit  $\mathcal{M}(E, \mathcal{E})$  bezeichnen wir die Menge der signierten Maße auf dem Messraum  $(E, \mathcal{E})$ . Es ist leicht nachzuvollziehen, dass durch  $\mu \leq \nu : \Leftrightarrow \mu(A) \leq \nu(A)$  für alle  $A \in \mathcal{E}$  eine partielle Ordnung definiert wird. Bzgl. dieser partiellen Ordnung definieren wir die Totalvariation  $\|\mu\| := |\mu|(X)$  von  $\mu$ . Es ist nicht schwer zu zeigen, dass  $\|\cdot\|$  eine Norm auf der Menge der signierten Maße ist. In [2] wird gezeigt, dass die Menge der signierten Maße ein Banach-Verband ist.

Für  $s \geq 0$  definieren wir den linearen Operator  $T_s : \mathcal{M}(E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{M}(E, \mathcal{E})$  durch:

$$(T_s \mu)[A] := \int K_s(x, A) \mu[dx]$$

für alle  $A \in \mathcal{E}$ . Damit ist  $T_s \mu$  die Verteilung des Markovprozesses  $X$  mit der Startverteilung  $\mu$  zum Zeitpunkt  $s$ . Also hat  $X$  genau dann eine stationäre Verteilung, wenn ein Wahrscheinlichkeitsmaß

$\mu \in \mathcal{M}(E, \mathcal{E})$  existiert mit  $T_s \mu = \mu$  für alle  $s \geq 0$ . Nach dem Krein-Rutman-Theorem ist das der Fall, wenn für alle  $s \geq 0$  der lineare Operator  $T_s$  kompakt und positiv ist und der Spektralradius  $r(T_s) = 1$  ist. Man beachte, dass das Krein-Rutman-Theorem nur sicher stellt, dass zu jedem  $T_s$  ein  $\mu_s$  mit  $T_s \mu_s = \mu_s$  existiert. Erst aus der Homogenität der Markovkette  $X$  folgt, dass  $\mu_s = \mu_t =: \mu$  für alle  $s, t \geq 0$  gilt.

Für alle  $s \geq 0$  nehmen wir an, dass  $K_s$  eine stetige Lebesgue-Dichte hat. Diese bezeichnen wir wieder mit  $K_s : E \times E \rightarrow [0, \infty)$  und definieren den Operator  $T_s : L^p(E, \mathcal{E}, \lambda) \rightarrow L^p(E, \mathcal{E}, \lambda)$  durch

$$(T_s f)(y) := \int K_s(x, y) f(x) \lambda(dx)$$

für  $y \in E$ . Falls  $f$  die Dichte der Startverteilung von  $X_s$  ist, dann ist  $T_s f$  die Dichte der Verteilung von  $X_s$ . Damit hat  $X$  genau dann eine stationäre Verteilung, wenn ein  $f \geq 0$  existiert mit  $T_s f = f$  für alle  $s \geq 0$  und  $\int f d\lambda = 1$ . Also hat  $X$  genau dann eine stationäre Verteilung, wenn die Voraussetzungen des Krein-Rutman-Theorems erfüllt werden und der Spektralradius gleich 1 ist. Es ist bekannt, dass  $L^p(E, \mathcal{E}, \lambda)$  für  $1 \leq p \leq \infty$  ein Banach-Verband bzgl. der partiellen Ordnung  $\leq$ , definiert durch  $f \leq g : \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \forall x \in E$ , ist. Es ist leicht einzusehen, dass  $r(T_s) = 1$  gilt und im Gegensatz zum vorherigen Fall, können wir in einem kompakten metrischen Raum zeigen, dass  $T_s$  kompakt ist.

**Satz 2.1** (Siehe [1]). In einem kompakten metrischen Raum  $(E, d)$  ist  $T_s$  für alle  $1 \leq p \leq \infty$  kompakt.

*Beweis.* Sei  $x_0 \in E$  und  $\varepsilon > 0$ . Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von  $K$  auf  $E \times E$  existiert ein  $\delta > 0$  mit  $d(x_0, x) < \delta$ , sodass  $|K(y, x) - K(y, x_0)| < \varepsilon$  für alle  $y \in E$  gilt. Falls also  $d(x_0, x) < \delta$  und  $f \in L^p(E, \mathcal{E}, \lambda)$  mit  $\|f\|_p \leq 1$  folgt aus der Hölder-Ungleichung:

$$\begin{aligned} |(T_s f)(x) - (T_s f)(x_0)| &= \left| \int (K_s(y, x) - K_s(y, x_0)) f(y) \lambda(dy) \right| \\ &= \varepsilon \left( \int |f(y)| \lambda(dy) \right) \\ &\leq \varepsilon (\mu(E))^{1/q} \|f\|_p \leq \varepsilon (\lambda(E))^{1/q} \end{aligned}$$

mit  $(1/p) + (1/q) = 1$ . Damit ist  $B^T := \{T_s f : \|f\|_p \leq 1\}$  eine bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  beschränkte und gleichgradige stetige Teilmenge von  $C(S)$ . Aus dem klassischen Ascoli-Arzelà Theorem folgt, dass  $B^T$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$  eine total beschränkte Teilmenge von  $C(S)$  ist und somit auch bzgl.  $\|\cdot\|_p$  eine total beschränkte Teilmenge von  $L^p(E, \mathcal{E}, \lambda)$  ist. Dies ist gleichbedeutend mit der Kompaktheit von  $T$ .  $\square$

Der Satz kann verallgemeinert werden, indem man anstelle des Lebesgue-Maßes  $\lambda$  ein allgemeines Borel-Maß  $\mu$  betrachtet.

### 3 Beweis Krein-Rutman-Theorem

Um das Krein-Rutman-Theorem zu beweisen, müssen wir zeigen, dass der Spektralradius ein Eigenwert ist und dass dieser einen positiven Eigenvektor hat. Wir werden wie folgt vorgehen:

1. Wir zeigen, dass jedes Nicht-Nullelement des Spektrums ein Eigenwert ist.
2. Wir zeigen, dass der Spektralradius ein Teil des Spektrums ist.
3. Wir beweisen das Krein-Rutman-Theorem indem wir zeigen, dass der Spektralradius einen positiven Eigenvektor hat.

Wir werden häufig auf Resultate aus der Operatortheorie zurückgreifen. Wir werden diese stets formulieren, jedoch nicht beweisen. Dieser Abschnitt orientiert sich an [1].

Im Nachfolgenden soll  $X$  stets ein Banach-Raum sein und  $T : X \rightarrow X$  ein linearer Operator. Wenn wir von Eigenvektoren und Eigenwerten bzw. dem Spektrum sprechen, dann meinen wir dies immer bzgl. des Operators  $T$ .

Um zu zeigen, dass jedes Nicht-Nullelement des Spektrums ein Eigenwert ist, benötigen wir die nachfolgenden Lemmata. Das erste Lemma folgt aus den Definitionen von Eigenwerten und -vektoren sowie aus der Linearität von  $T$ .

**Lemma 3.1.** Wir betrachten  $n$  unterschiedliche Eigenwerte von  $T$  mit den korrespondierenden Eigenvektoren  $x_1, \dots, x_n$ , dann ist die Menge der Eigenvektoren  $\{x_1, \dots, x_n\}$  eine linear unabhängige Menge.

Für endlichdimensionale Räume, wie z.B.  $\mathbb{R}^n$ , folgt aus dem Lemma sofort, da es nur endlich viele unterschiedliche Eigenwerte geben kann, da maximal eine endliche Anzahl an Elementen linear unabhängig sein können.

**Lemma 3.2** (F. Riesz). Sei  $Y$  ein echter Unterraum von  $X$  und  $0 < \varepsilon < 1$ . Dann existiert ein normiertes  $x \in X$ , sodass  $\sup_{y \in Y} \|y - x\| \geq \varepsilon$  gilt.

Falls wir  $X = \mathbb{R}^n$  wählen ist  $Y = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$  ein echter Unterraum von  $X$ . Wählen wir  $x = e_n$ , wobei  $e_n$  der  $n$ -te Einheitsvektor ist, dann gilt  $\|x - y\|_2 \geq 1$  für alle  $y \in Y$ .

**Lemma 3.3.** Für einen kompakten Operator  $T$  ist für jedes  $\varepsilon > 0$  die Menge  $\{\lambda \in \sigma_p(T) : |\lambda| > \varepsilon\}$  endlich.

*Beweis.* Wir nehmen an, dass die Menge nicht endlich ist, d.h. es gibt eine Folge von unterschiedlichen Eigenwerten  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $|\lambda_n| > \varepsilon > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Zu jeden dieser Eigenwerte  $\lambda_n$  betrachten wir die normierten Eigenvektoren  $x_n$ . Aus dem Lemma 3.1 folgt dann, dass die Menge  $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$  eine linear unabhängige Menge ist.

Setze  $V_n := \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ , dann ist  $V_{n-1}$  ein echter Unterraum von  $V_n$  und wir können das Lemma von Riesz (Lemma 3.2) anwenden. Es existiert also ein normiertes  $y_n \in V_n$  mit  $\|y_n - y\| \geq 1/2$  für alle  $y \in V_{n-1}$ . Wir wollen nun zeigen, dass  $Ty_n - \lambda_n y_n \in V_{n-1}$  gilt. Dazu betrachten wir die Linearkombination  $y_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$  aus Eigenvektoren, mit welcher wir

$$Ty_n - \lambda_n y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_n x_i = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_n) x_i \in V_{n-1}$$

bekommen. Für  $n > m$  gilt:  $Ty_m + \lambda_n y_n - Ty_n \in V_{n-1}$  und wir bekommen:

$$\begin{aligned} \|Ty_n - Ty_m\| &= \|\lambda_n y_n + (Ty_n - \lambda_n y_n - Ty_m)\| \\ &= |\lambda_n| \|y_n - \lambda_n^{-1}(Ty_m + \lambda_n y_n - Ty_n)\| \geq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Damit kann  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nie eine Teilfolge  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  besitzen, für welche  $(Tz_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, auch nicht falls  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  beschränkt ist. Dies steht natürlich im Widerspruch zur Kompaktheit von  $T$  und das Lemma ist somit gezeigt.  $\square$

Aus dem Lemma folgt, dass die Menge der Eigenwerte (maximal) abzählbar ist. Es ist auch möglich, dass kein Eigenwert  $\lambda$  existiert mit  $|\lambda| > 0$ .

Um nun zu zeigen, dass jedes nicht Null-Element des Spektrums ein Eigenwert ist, benötigen wir das approximierende Punktspektrum. Dies ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \sigma_a(T) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \exists x \text{ normiert mit } \|\lambda x - Tx\| < \varepsilon\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ normiert mit } \lambda x_n - Tx_n \rightarrow 0, \text{ für } n \rightarrow \infty\}. \end{aligned}$$

Die Elemente aus dem approximierenden Punktspektrum sind also jene, für welche die Eigenwertgleichung  $(Tx = \lambda x)$  nur approximativ gilt, d.h. im Grenzübergang.

**Lemma 3.4.** Es gelten die folgenden Inklusionen:

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T) \subseteq \sigma(T) \quad \text{und} \quad \partial\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T).$$

Es ist klar, dass jeder Eigenwert ein approximierender Spektralwert ist. Um zu zeigen, dass das approximierende Punktspektrum im Spektrum liegt, betrachtet man eine  $\varepsilon$ -Umgebung von 0 mit  $0 < \varepsilon < 1$ . Diese bildet der lineare Operator  $\lambda Id - T$  wiederum in eine Umgebung von 0 ab. In dieser gibt es aber Bildwerte  $u = \lambda x_n - Tx_n$ . In diesen Punkten ist  $\lambda Id - T$  dann nicht invertierbar. Dass der Rand des Spektrums im approximierenden Punktspektrum liegt, ist schwieriger zu zeigen.

Wir können nun unser erstes Hauptresultat formulieren und haben damit den ersten Punkt in unserer Agenda in diesem Abschnitt erledigt.

**Satz 3.5.** Für einen kompakten Operator ist jedes Nicht-Nullelement des Spektrums ein Eigenwert.

*Beweis.* Die Aussage folgt, indem wir die folgenden beiden Aussagen zeigen:

1.  $\lambda \in \partial\sigma(T) \setminus \{0\} \Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T)$ .
2.  $\text{int}(\sigma(T)) = \emptyset$ .

zu 1.: Sei also  $\lambda \in \partial\sigma(T) \setminus \{0\}$ . Aus Lemma 3.4 folgt, dass  $\lambda \in \sigma_a(T)$  ist. Damit existiert eine normierte Folge  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sodass  $\lambda x_n - Tx_n$  eine Nullfolge ist. Wir betrachten nun ein Teilfolge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für welche  $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Diese existiert, da  $T$  kompakt ist und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  als normierte Folge beschränkt ist. Aus  $y_n = (1/\lambda)Ty_n - (1/\lambda)(Ty_n - \lambda y_n)$  folgt, dass  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Der Grenzwert sei  $y$ . Für diesen gilt  $\|y\| = 1$  wegen  $\|y_n\| = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Aus  $Ty_n - \lambda y_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  folgt:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ty_n - \lambda y_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) - \lambda\left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n\right) = Ty - \lambda y.$$

Wir können den Grenzwert in die Funktion ziehen, weil  $T$  als kompakter Operator auch stetig ist. Damit ist also  $\lambda$  ein Eigenwert und somit ist jeder Randpunkt des Spektrums ein Eigenwert.

zu 2.: Wir nehmen an, dass das Innere vom Spektrum nicht leer ist. Daraus folgt aber, dass das Spektrum überabzählbar ist und somit auch dessen Abschluss. Das bedeutet aber auch, dass die Menge der Eigenwerte überabzählbar ist. Dies ist ein Widerspruch!  $\square$

Wir kommen nun zum zweiten Punkt unserer Agenda und wollen zeigen, dass der Spektralradius Teil des Spektrums ist. Daraus ergibt sich - in unserem Fall - dann mit Hilfe von Lemma 3.3, dass ein positiver Spektralradius ein Eigenwert ist.

**Lemma 3.6.** Sei  $X$  ein komplexer Banach-Raum und  $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge ohne Eigenwerten, die gegen  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$  konvergiert. Dann gilt die Äquivalenz:

$$\lambda_0 \in \sigma(T) \Leftrightarrow \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| \rightarrow \infty, \text{ für } n \rightarrow \infty$$

Falls wir keinen komplexen Banach-Raum gegeben haben, können wir diesen zu einem komplexen Banach-Raum erweitern. Diese Erweiterung funktioniert analog zur Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen. Die komplexe Erweiterung wird wie folgt gebildet:

- $X_c := X + iX = \{x + iy : x, y \in X\}$  ist die komplexe Erweiterung von  $X$ .
- $\|z\|_c := \|\|z\|\|$  ist die von  $X$  auf  $X_c$  induzierte Norm.
- $T_c(x + iy) := Tx + iTy$  ist die zum Operator  $T$  gehörende komplexe Erweiterung.

Für den Operator  $T$  interpretieren wir die imaginäre Einheit  $i$  als Skalar und nutzen die Linearität von  $T$  aus. Falls  $T$  schon auf einem komplexen Raum definiert ist, folgt aus der Linearität von  $T$ , dass  $T(x + iy) = Tx + iTy$  gilt. Deswegen werden wir im Weiteren bei den Operatoren nicht zwischen  $T$  und  $T_c$  unterscheiden.

**Lemma 3.7.** Falls  $T$  ein positiver Operator auf einem reellen Banach-Verband  $X$  ist, dann gilt:

$$|(\lambda Id - T)^{-1}z| \leq (|\lambda| Id - T)^{-1}|z|$$

für alle  $z \in X_c$ .

Um das Lemma zu beweisen nutzt man die Neumann-Reihe und schreibt:  $(\lambda Id - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n$ . Indem man:

- $|(\lambda Id - T)^{-1}z_n| \leq T|z|$  für  $z \in E_c$  bzw.  $|Tz| \leq T|z|$  für allgemeine positive Operatoren und
- $|\sum_{n=1}^{\infty} z_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  sofern die rechte Seite existiert

zeigt, folgt das Lemma aus:

$$|(\lambda Id - T)^{-1}z| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} T^n z \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} |T^n z| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^{-(n+1)} T^n |z| = (|\lambda| Id - T)^{-1}|z|.$$

**Satz 3.8.** Falls  $X$  ein Banach-Verband ist, dann ist der Spektralradius eines positiven Operators ein Element des Spektrums.

*Beweis.* O.B.d.A. Sei  $X$  reell, sonst betrachte den reellen Teil von  $X$ .

Wir definieren die Folge  $\lambda_n := r(T) + (1/n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Kein Element der Folge ist ein Eigenwert und es gilt  $\lambda_n \rightarrow r(T)$  für  $n \rightarrow \infty$ . Damit reicht es nach Lemma 3.6 aus,  $\|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$  zu zeigen.

Wir betrachten ein festes  $\alpha \in \sigma(T)$  mit  $|\alpha| = r(T)$  und setzen  $\mu_n := (\alpha/|\alpha|)\lambda_n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Offensichtlich gelten:

$$y_n \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T), \quad |\mu_n| = \frac{|\alpha|\lambda_n}{|\alpha|} = \lambda_n = \lambda_n, \quad \mu_n \rightarrow \alpha \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Aus Lemma 3.6 folgt dann  $\|(\lambda_n Id - T)^{-1}\|_c \rightarrow \infty$  für  $n \rightarrow \infty$ .

Wir wählen nun ein normiertes  $z_n \in X_c$  sodass

$$\|(\mu_n Id - T)^{-1} z_n\| \geq \frac{1}{2} \|(\mu_n Id - T)^{-1}\|_c.$$

gilt. Ein solches  $z_n$  existiert, denn es existiert eine Folge  $(z_m^n)_{m \in \mathbb{N}}$  mit

$$\|(\mu_n Id - T)^{-1} z_m^n\| \rightarrow \|(\mu_n Id - T)^{-1}\|, \text{ für } m \rightarrow \infty$$

und wir bekommen  $z_n$  indem wir  $m$  hinreichend groß wählen und  $z_n := z_m^n$  setzen. Aus der Wahl von  $z_n$  folgt nun:

$$\|(\mu_n Id - T)^{-1} z_n\| \leq \frac{1}{2} \|(\mu_n Id - T)^{-1}\| = \frac{1}{2} \|(\mu_n Id - T)^{-1}\|_c.$$

Die letzte Gleichung gilt, weil  $(\mu_n Id - T)^{-1}$  ein positiver Operator ist. Dies folgt aus der Tatsache, dass  $|\mu_n| > |x|$  für alle  $x \in \sigma_p(T)$  ist. Mit Hilfe von Lemma 3.7 bekommen wir:

$$|(\mu_n Id - T)^{-1} z_n| \leq (|\mu_n| Id - T)^{-1} |z_n| = (\lambda_n Id - T)^{-1} |z_n|.$$

Insgesamt folgt:

$$\|(\lambda_n Id - T)^{-1}\|_c = \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| \geq \|(\lambda_n Id - T)^{-1} |z_n|\| \geq \frac{1}{2} \|(\mu_n Id - T)^{-1}\|_c \rightarrow \infty, \\ \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Die erste Gleichung gilt weil  $(\lambda_n Id - T)^{-1}$  positiv ist. □

Um das Krein-Rutman-Theorem zu beweisen müssen wir nur noch zeigen, dass zum Eigenwert  $r(T)$  ein positiver Eingenvektor existiert.

**Satz 3.9** (Krein-Rutman-Theorem). Ist  $T$  ein positiver kompakter Operator auf einem Banach-Verband mit positivem Spektralradius, dann ist dieser ein Eigenwert mit einem positiven Eigenvektor.

*Beweis.* Wie erwähnt müssen wir nur noch zeigen, dass  $r(T)$  einen positiven Eigenvektor hat. Zunächst gehen wir wie im Beweis von Satz 3.8 vor. Wir definieren die Folge  $\lambda_n := r(T) + (1/n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Wir wissen, dass

$$\|(\lambda_n Id - T)^{-1}\|_c \rightarrow \infty \text{ für } n \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\|_c = \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| \quad (1)$$

gelten. Damit gibt es ein  $y_n \in X$  mit:

$$\|(\lambda_n Id - T)^{-1} y_n\| \geq \frac{1}{2} \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\| = \frac{1}{2} \|(\lambda_n Id - T)^{-1}\|_c > 0. \quad (2)$$

Mit diesem definieren wir das positive und normierte Element:

$$x_n := \frac{(\lambda_n Id - T)^{-1} y_n}{\|(\lambda_n Id - T)^{-1} y_n\|}.$$

Aus

$$Tx_n - r(T)x_n = (\lambda_n Id - T)x_n - (\lambda_n Id - T)x_n = \frac{1}{n}x_n - \frac{y_n}{\|(\lambda_n Id - T)^{-1}y_n\|}$$

folgt

$$\|Tx_n - r(T)x_n\| = \frac{1}{n} + \frac{2}{\|(\lambda_n Id - T)^{-1}\|_c} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty$$

indem wir die Abschätzung aus (2) und die Konvergenz aus (1) nutzen.

Wir betrachten nun eine Teilfolge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  für welche  $(Ty_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert. Aus  $\|Ty_n - r(T)y_n\| \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$  (siehe (1)) und  $r(T) > 0$  folgt, dass die komponentenweise positive und normierte Folge  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen ein positives normiertes  $y$  konvergiert. Insgesamt bekommen wir:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (Ty_n - r(T)y_n) = Ty - r(T)y.$$

Also ist  $y$  ein positiver Eigenvektor zum Eigenwert  $r(T)$ . □

## 4 Spezialfall: das Perron-Frobenius-Theorem

Wenn wir  $X = \mathbb{R}^n$  wählen, lässt sich der lineare Operator  $T : X \rightarrow X$  durch eine Matrix identifizieren und wir bekommen einen Teil des Perron-Frobenius-Theorems.

**Satz 4.1** (Perron-Frobenius-Theorem). Für  $A \in \mathbb{R}_{\geq 0}^{n,n}$  existiert ein  $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}^n \setminus \{0\}$  mit  $Ax = r(A)x$ .

Das allgemeine Perron-Frobenius-Theorem setzt voraus, dass  $A$  irreduzibel ist. Damit bekommt man einen 1-dimensionalen Eigenraum. Dies hat zur Folge, dass, falls  $A$  eine Übergangsmatrix einer Markovkette ist, die Markovkette eine eindeutige stationäre Verteilung hat. Das Krein-Rutman-Theorem hingegen macht keine Aussage bzgl. der Dimension des Eigenraums.

Das Perron-Frobenius-Theorem ist nicht mehr wahr für die Wahl  $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ , denn dann muss  $T : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  mit  $T : x \mapsto Ax$  nicht notwendigerweise mehr kompakt sein. Dazu betrachte das nachfolgende Beispiel.

**Beispiel 4.2.** Wir betrachten die Matrix  $A = [a_{i,j}]_{i,j \in \mathbb{N}}$  mit  $a_{i,j} = 1$  falls  $i \leq j$  und 0 sonst sowie die Einheitskugel  $B := \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |x_i| \leq 1 \forall i \in \mathbb{N}\}$  bzgl. der Maximumsnorm  $\|\cdot\|_{\infty}$ .  $B$  ist eindeutig beschränkt. Jedoch ist  $T(B)$  nicht mehr beschränkt, denn  $(1, 2, 3, \dots) \in T(B)$ . Damit kann  $T(B)$  keinen beschränkten Abschluss haben und ist somit nicht relativ kompakt.

## 5 Beispiel 2: Martingaleigenschaft

Wir erinnern uns an den Markovprozess  $(X_s)_{s \geq 0}$  mit der Startverteilung  $\mu$  und der Familie an Übergangskernen  $(K_s)_{s \geq 0}$ , mit welcher die Verteilung der Markovkette durch den Operator

$$(T_s \mu)[A] = \int K(x, A) \mu[dx]$$

für alle  $A \in \mathcal{E}$  gegeben ist, sofern  $\mu$  die Startverteilung von  $X$  ist. Wir konnten im Abschnitt 2 nicht sicher stellen, dass dieser kompakt ist und somit das Krein-Rutman-Theorem nicht anwenden. Oft ist es deswegen einfacher den folgenden kompakten Integraloperator zu betrachten:

$$(U_s f)(x) := \int f(y) K_s(x, dy) = \mathbb{E}[f(X_s) \mid X_0 = x]$$

für alle  $f \in L^p(E, \mathcal{E}, K_s(\cdot, \cdot))$ . Die Operatoren  $T_s$  und  $U_s$  sind dual zueinander im folgenden Sinn:

1. Wählen wir  $\mu = \delta_y$ , d.h. unsere Markovkette  $X$  startet im Punkt  $y$ , und  $f = \mathbf{1}_B$ , dann gilt:

$$(T_s \mu)(B) = \int K_x(x, B) \delta_y(dx) = K_x(y, B) = \int \mathbf{1}_B(q) K_s(y, dq) = (U_s f)(y).$$

2. Wir definieren die Abbildung  $\mu \mapsto \int f(x) \mu(dx) =: (f, \mu)$  für  $\mu \in \mathcal{M}(E, \mathcal{E})$ , dann gilt:

$$(f, T_s \mu) = \int f(y) \int K_s(x, dy) \mu(dx) = \int \int f(y) K_s(x, dy) \mu(dx) = (U_s f, \mu).$$

Wenn wir das Krein-Rutman-Theorem auf den Operator  $U_s$  anwenden, bekommen wir folgenden interessanten Zusammenhang:

**Satz 5.1.** Falls  $r(U_s) = 1$  für alle  $s > 0$  ist, dann erfüllt  $f(X_s)$  die Martingaleigenschaft.

*Beweis.* Da  $U$  kompakt ist und  $L^p$  ein Banach-Verband ist, können wir das Krein-Rutman-Theorem anwenden und bekommen:

$$\mathbb{E}[f(X_s) \mid X_0] = (U_s f)(X_0) = r(U_s)f(X_0).$$

Wenn also  $r(T) = 1$  ist, folgt:

$$\mathbb{E}[f(X_s) \mid X_t = x] = \mathbb{E}[f(X_{s-t}) \mid X_0 = x] = f(x)$$

und damit die Martingaleigenschaft  $\mathbb{E}[f(X_s) \mid X_t] = f(X_t)$  für  $t \leq s$ . □

## Literatur

- [1] Y.A. Abramovich and C.D. Aliprantis. *An Invitation to Operator Theory*. American Mathematical Society, 2002.
- [2] J. Elstrodt. *Maß- und Integrationstheorie*. Springer, 2010.