Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

Leibniz
Gemeinschaft

Universalität der Fluktuationen:
Warum ist alles ungefähr Gauß-verteilt?

Wolfgang König

Technische Universität Berlin und Weierstraß-Institut Berlin

Weinberg-Gymnasium, 10. März 2025

Übersicht

- Wie sind Summen von unabhängigen Zufallsgrößen verteilt?
- Eine der wichtigsten Verteilungen: die Binomialverteilung

Übersicht

- Wie sind Summen von unabhängigen Zufallsgrößen verteilt?
- Eine der wichtigsten Verteilungen: die Binomialverteilung
- Sehr gute Approximation mit der berühmten Gauß'schen Glockenkurve
- berühmter Satz von DE MOIVRE–LAPLACE: Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (= Gauß-Verteilung)
- Illustration: das GALTONbrett

- Wie sind Summen von unabhängigen Zufallsgrößen verteilt?
- Eine der wichtigsten Verteilungen: die Binomialverteilung
- Sehr gute Approximation mit der berühmten Gauß'schen Glockenkurve
- berühmter Satz von DE MOIVRE–LAPLACE: Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung (= Gauß-Verteilung)
- Illustration: das GALTONbrett
- Aber es geht noch viel allgemeiner und universeller:

Summen von unabhängigen Zufallsgrößen kann man fast immer mit der Normalverteilung approximieren!

- Der Zentrale Grenzwertsatz: eines der fundamentalsten Prinzipien der Wahrscheinlichkeitstheorie!
- Anwendungen: Rundungsfehler beim Währungsumtausch

Würfeln

Wenn man einen fairen Würfel 1200 Mal wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zwischen 190 und 200 Sechsen fallen?

Würfeln

Wenn man einen fairen Würfel 1200 Mal wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zwischen 190 und 200 Sechsen fallen?

Lösungsskizze: (Formeln folgen)

- Wenn man mit X_i den Erfolg beim i-ten Wurf bezeichnet (also $X_i 1$, wenn der i-te Wurf eine Sechs zeigt, sonst $X_i = 0$), dann ist X_i Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
- Die 120 Erfolge $X_1, \dots, X_{120}$ sind unabhängig.

Würfeln

Wenn man einen fairen Würfel 1200 Mal wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zwischen 190 und 200 Sechsen fallen?

Lösungsskizze: (Formeln folgen)

- Wenn man mit X_i den Erfolg beim i-ten Wurf bezeichnet (also $X_i 1$, wenn der i-te Wurf eine Sechs zeigt, sonst $X_i = 0$), dann ist X_i Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
- Die 120 Erfolge $X_1, \dots, X_{120}$ sind unabhängig.
- Die 120 Würfe sind ein Bernoulli-Experiment der Länge $n = 1200$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
- Wenn $X = X_1 + \cdots + X_{120}$ die Anzahl der Sechsen ist, dann ist X eine binomial-verteilte Zufallsgröße zu den Parametern $n = 1200$ und $p = \frac{1}{6}$.

Würfeln

Wenn man einen fairen Würfel 1200 Mal wirft, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dabei zwischen 190 und 200 Sechsen fallen?

Lösungsskizze: (Formeln folgen)

- Wenn man mit X_i den Erfolg beim i-ten Wurf bezeichnet (also $X_i 1$, wenn der i-te Wurf eine Sechs zeigt, sonst $X_i = 0$), dann ist X_i Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
- Die 120 Erfolge $X_1, \dots, X_{120}$ sind unabhängig.
- Die 120 Würfe sind ein Bernoulli-Experiment der Länge $n = 1200$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$.
- Wenn $X = X_1 + \dots + X_{120}$ die Anzahl der Sechsen ist, dann ist X eine binomial-verteilte Zufallsgröße zu den Parametern $n = 1200$ und $p = \frac{1}{6}$.
- Wir suchen die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass $X \in \{190, 191, \dots, 200\}$.
- Diese ist gleich der Summe

$$\mathbb{P}(X = 190) + \mathbb{P}(X = 191) + \dots + \mathbb{P}(X = 200).$$

- Nun muss man nur noch einsetzen und ausrechnen ...

Verteilung auf $\{0, \ldots, n\}$. Parameter: $n \in \mathbb{N}$, $p \in (0, 1)$.

$$\mathrm{Bin}_{n,p}(k) = \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Verteilung auf $\{0,\dots,n\}$. Parameter: $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Bin}_{n,p}(k)=\mathbb{P}(X=k)&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\dots\cdot n}{k!}p^k(1-p)^{n-k},\qquad k\in\{0,\dots,n\}.\end{aligned}$$

Verteilung auf $\{0,\ldots,n\}$. Parameter: $n\in\mathbb{N}$, $p\in(0,1)$.

$$\begin{aligned}\mathrm{Bin}_{n,p}(k)=\mathbb{P}(X=k)&=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}\\&=\frac{(n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdot\cdots\cdot n}{k!}p^k(1-p)^{n-k},\qquad k\in\{0,\ldots,n\}.\end{aligned}$$

- Verteilung der Anzahl der Erfolge in einer Serie von n Glückspielen mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
- Verteilung der Summe von n unabhängigen BERNOULLI-verteilten Zufallsgrößen
- Erwartungswert $\mathbb{E}(X)=\sum_{k=0}^n k\mathrm{Bin}_{p,n}(k)=np$. Beweis mit Rechnung oder mit obiger Interpretation.
- Varianz $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}\big((X-\mathbb{E}(X))^2\big)=\sum_{k=0}^n k^2\mathrm{Bin}_{p,n}(k)-(np)^2=np(1-p)$. Beweis dito.

Ausrechnen!

Wir rechnen die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei 1200 Mal Würfeln zwischen 190 und 200 Sechsen gewürfelt werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in & \{190, 191, \dots, 200\}) \\ &= \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(190) + \cdots + \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(200)\end{aligned}$$

Wir rechnen die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei 1200 Mal Würfeln zwischen 190 und 200 Sechsen gewürfelt werden:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \in & \{190, 191, \dots, 200\}) \\ &= \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(190) + \cdots + \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(200) \\ &= \frac{1200!}{190!\,1010!}\left(\frac{1}{6}\right)^{190}\left(\frac{5}{6}\right)^{1010} + \cdots + \frac{1200!}{200!\,1000!}\left(\frac{1}{6}\right)^{200}\left(\frac{5}{6}\right)^{1000}\end{aligned}$$

Ausrechnen!

Wir rechnen die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei 1200 Mal Würfeln zwischen 190 und 200 Sechsen gewürfelt werden:

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in \{190, 191, \ldots, 200\}) \\
&\qquad = \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(190) + \cdots + \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(200) \\
&\qquad = \frac{1200!}{190!\,1010!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{190}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{1010} + \cdots + \frac{1200!}{200!\,1000!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{200}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{1000} \\
&\qquad = 5^{1000}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{1200}\frac{1011\cdot 1012\cdot\cdots\cdot 1200}{190!} \\
&\qquad\qquad \times \Big[5^{10} + \frac{1010}{191}5^{9} + \frac{1010\cdot 1009}{191\cdot 192}5^{8} + \cdots + \frac{1010\cdot\cdots\cdot 1001}{191\cdot 200}\Big]
\end{aligned}
$$

Wir rechnen die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei 1200 Mal Würfeln zwischen 190 und 200 Sechsen gewürfelt werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in & \{190, 191, \dots, 200\}) \\
&= \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(190) + \cdots + \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(200) \\
&= \frac{1200!}{190!\,1010!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{190}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{1010} + \cdots + \frac{1200!}{200!\,1000!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{200}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{1000} \\
&= 5^{1000}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{1200}\frac{1011 \cdot 1012 \cdot \dots \cdot 1200}{190!} \\
&\quad \times \Big[5^{10} + \frac{1010}{191}5^9 + \frac{1010 \cdot 1009}{191 \cdot 192}5^8 + \cdots + \frac{1010 \cdot \dots \cdot 1001}{191 \cdot 200}\Big]
\end{aligned}
$$

Wer hat Lust, weiterzurechnen???

Wir rechnen die Wahrscheinlichkeit aus, dass bei 1200 Mal Würfeln zwischen 190 und 200 Sechsen gewürfelt werden:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in & \{190, 191, \dots, 200\}) \\
& = \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(190) + \cdots + \mathrm{Bin}_{1200,1/6}(200) \\
& = \frac{1200!}{190!\,1010!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{190}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{1010} + \cdots + \frac{1200!}{200!\,1000!}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{200}\Big(\frac{5}{6}\Big)^{1000} \\
& = 5^{1000}\Big(\frac{1}{6}\Big)^{1200}\frac{1011\cdot 1012\cdot \cdots \cdot 1200}{190!} \\
& \quad \times \Big[5^{10} + \frac{1010}{191}5^{9} + \frac{1010\cdot 1009}{191\cdot 192}5^{8} + \cdots + \frac{1010\cdot \cdots \cdot 1001}{191\cdot 200}\Big]
\end{aligned}
$$

Wer hat Lust, weiterzurechnen???

Geht das nicht einfacher?

Wie verhält sich $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$ für $n \to \infty$?

Idee: $X \approx \mathbb{E}(X) = np$ nach dem Gesetz der Großen Zahlen.

Wie verhält sich $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$ für $n \to \infty$?

Idee: $X \approx \mathbb{E}(X) = np$ nach dem Gesetz der Großen Zahlen.

Aber wie groß ist die Abweichung $X - \mathbb{E}(X)$ typischerweise?

Wie verhält sich $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$ für $n \to \infty$?

Idee: $X \approx \mathbb{E}(X) = np$ nach dem Gesetz der Großen Zahlen.

Aber wie groß ist die Abweichung $X - \mathbb{E}(X)$ typischerweise?

Antwort: etwa so groß wie die Standardabweichung: die Wurzel aus der erwarteten quadratischen Abweichung, also der Varianz von X:

$$\mathbb{S}(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big]}.$$

Wie verhält sich $X \sim \mathrm{Bin}_{n,p}$ für $n \to \infty$?

Idee: $X \approx \mathbb{E}(X) = np$ nach dem Gesetz der Großen Zahlen.

Aber wie groß ist die Abweichung $X - \mathbb{E}(X)$ typischerweise?

Antwort: etwa so groß wie die Standardabweichung: die Wurzel aus der erwarteten quadratischen Abweichung, also der Varianz von X:

$$\mathbb{S}(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}(X))^2\big]}.$$

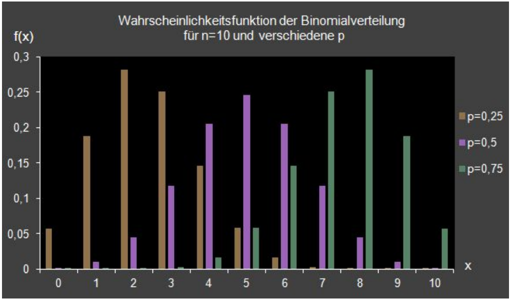
Für die Binomial-Verteilung ist das leicht auszurechen:

$$\sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{np(1-p)}.$$

$\Longrightarrow$ Vermutung: $\dfrac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ konvergiert.

Die Limes-Zufallsgröße sollte Erwartungswert Null und Varianz Eins haben.

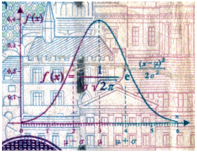
Aber was sollte sie sein? Und was soll “konvergiert” heißen?



(Quelle:
`http://www.poissonverteilung.de/binomialverteilung.html`)

- Histogramme der Binomialverteilung mit $n = 10$ und $p = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{2}$ und $p = \frac{3}{4}$.
- Ihre größten Werte konzentrieren sich jeweils um den Erwartungswert $10p$.
- Die Werte liegen am engsten um $10p$ herum für $p = \frac{1}{2}$.
- In geeignetem Maßstab zeigt sich eine schöne Kurve, die GAUSS'sche Glockenkurve.

Von 1991 bis 1999 war ein 10-DM-Schein im Umlauf, der Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) und die nach ihm benannte Gauß'sche Glockenkurve zeigte sowie ihre Funktionsgleichung. Die Verteilung, die diese Dichte hat, nennt man die Normal- oder die Gauß-Verteilung.



Es ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$ (hier verschoben um μ). Die Fläche unter ihrer Kurve ist Eins. Man kennt keine einfachen Ausdrücke für ihre Stammfunktion.

Satz von de Moivre–Laplace (1730)

Wenn $X \sim \mathrm{Bin}_{p,n}$, so konvergiert $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ gegen die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}$. Das heißt, für alle $a < b$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(a \leq \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(a \leq \mathcal{N} \leq b).$$

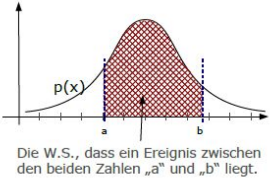
Satz von de Moivre–Laplace (1730)

Wenn $X \sim \mathrm{Bin}_{p,n}$, so konvergiert $\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ gegen die Standard-Normalverteilung $\mathcal{N}$. Das heißt, für alle $a < b$ gilt

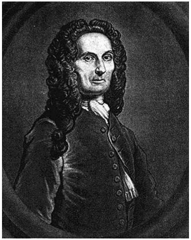
$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(a \le \frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}} \le b\Big) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(a \le \mathcal{N} \le b).$$

Beweis:

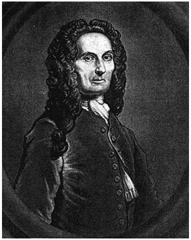
- Stirling-Formel
  $n! \approx \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$
- Taylor-Approximation
  $\log(1+\varepsilon) \approx \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2$
- Exponentialsatz
  $(1+\frac{c}{n})^n \approx \mathrm{e}^c$
- fummlige Rechnungen



(Quelle: `www.mathe-seite.de`)



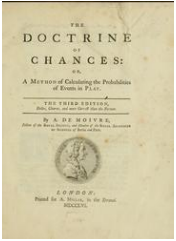
ABRAHAM DE MOIVRE (1667 – 1754) verbrachte wegen Hugenottenverfolgungen den Hauptteil seines Lebens in England und war über Jahrzehnte ein Pionier der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er war befreundet mit ISAAC NEWTON, EDMOND HALLEY und JAMES STIRLING. Die Stirling-Formel bewies de Moivre ebenfalls als erster, bis auf die Identifikation der Konstanten $\sqrt{2\pi}$, die auf Stirling zurückgeht.



ABRAHAM DE MOIVRE (1667 – 1754) verbrachte wegen Hugenottenverfolgungen den Hauptteil seines Lebens in England und war über Jahrzehnte ein Pionier der Wahrscheinlichkeitstheorie. Er war befreundet mit ISAAC NEWTON, EDMOND HALLEY und JAMES STIRLING. Die Stirling-Formel bewies de Moivre ebenfalls als erster, bis auf die Identifikation der Konstanten $\sqrt{2\pi}$, die auf Stirling zurückgeht.

Die zweite Auflage des berühmten Buches *The Doctrine of Chances* von 1738 enthält die erste veröffentlichte Version des Satzes.

PIERRE-SIMON LAPLACE (1749 – 1827) stellte ihn in einen größeren Zusammenhang in seinem Werk *Theorie Analytique des Probabilites* im Jahre 1821. Beide Publikationen dieses Satzes fanden nicht viel Aufmerksamkeit durch Zeitgenossen.



(Quelle: `https://openlibrary.org/`)

Die Anzahl X der Sechsen bei $n = 1200$ Mal Würfeln hat also den Erwartungswert $np = 200$ und die Varianz $np(1-p) = 1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1000}{6}$. Nach de Moivre–Laplace ist also

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \in \{190, \dots, 200\}) &= \mathbb{P}(190 \le X \le 200) \\ &= \mathbb{P}(-10 \le X - np \le 0) \end{aligned}$$

Die Anzahl X der Sechsen bei $n = 1200$ Mal Würfeln hat also den Erwartungswert $np = 200$ und die Varianz $np(1-p) = 1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1000}{6}$. Nach de Moivre–Laplace ist also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in \{190, \dots, 200\}) &= \mathbb{P}(190 \le X \le 200) \\
&= \mathbb{P}(-10 \le X - np \le 0) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{-10}{\sqrt{1000/6}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 0\Big)
\end{aligned}$$

Die Anzahl X der Sechsen bei $n = 1200$ Mal Würfeln hat also den Erwartungswert $np = 200$ und die Varianz $np(1-p) = 1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1000}{6}$. Nach de Moivre–Laplace ist also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in \{190, \dots, 200\}) &= \mathbb{P}(190 \le X \le 200) \\
&= \mathbb{P}(-10 \le X - np \le 0) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{-10}{\sqrt{1000/6}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 0\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 0\Big)
\end{aligned}$$

Die Anzahl X der Sechsen bei $n = 1200$ Mal Würfeln hat also den Erwartungswert $np = 200$ und die Varianz $np(1-p) = 1200 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{1000}{6}$. Nach de Moivre–Laplace ist also

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in \{190, \dots, 200\}) &= \mathbb{P}(190 \le X \le 200) \\
&= \mathbb{P}(-10 \le X - np \le 0) \\
&= \mathbb{P}\Big(\frac{-10}{\sqrt{1000/6}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 0\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(-\sqrt{\frac{3}{5}} \le \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 0\Big) \\
&\approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{\frac{3}{5}}}^{0} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2} \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Den Wert dieses Integrals entnimmt man Tabellen. (Es gibt keine explizite Stammfunktion!)

Visualisierung mit dem Galtonbrett

- N Kugeln fallen durch ein regelmäßiges Muster von Hindernissen, so dass jedes Mal “links” und “rechts” mit gleicher Wahrscheinlichkeit gewählt wird.
- Die Schritte sind also gleichverteilt auf $\{-1, 1\}$ (standardisiert).
- Die Summe der Abweichungen vom Startort zeigt sich unten im Ort der Kugel nach ihrem Lauf; er ist genähert standardnormalverteilt ($n = 6$ im Satz von MOIVRE-LAPLACE).
- Die Glockenkurve zeigt sich im Histogramm von N unabhängigen Wiederholungen bei geschickter Kopplung von N mit $n = 6$.

(Quelle: Universität Mainz)

Pierre-Simon Laplace zeigte 1812, dass die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}$ als universeller Grenzwert bei quasi allen Verteilungen der Summanden herauskommt:

Zentraler Grenzwertsatz

Seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, identisch verteilte Zufallsgrößen mit Erwartungswert Null und Varianz Eins, dann konvergiert $n^{-1/2}(X_1 + \dots + X_n)$ in Verteilung gegen $\mathcal{N}$, das heißt, für jedes $a < b$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n X_i \in [a,b]\Big) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \mathbb{P}(a \le \mathcal{N} \le b).$$

Der Zentraler Grenzwertsatz ist eine der fundamentalsten Aussagen der W'Theorie!

Wenn n unabhängige zufällige Größen addiert werden,

mit der selben Verteilung, Erwartungswert Null und Varianz Eins,

dann entsteht ungefähr $\sqrt{n}$ Mal eine standardnormalverteilte Zufallsgröße.

Erst um 1900 griffen Stochastiker den Satz von de Moivre–Laplace auf, erkannten seine fundamentale Bedeutung und erweiterten ihn in mehrere Richtungen.

Alexander Lyapunov (1857 – 1918) zeigte, dass der Satz auch noch gilt, wenn man auf die Unabhängigkeit verzichtet, aber eine geeignete Bedingung an die Summanden stellt (die Lyapunov-Bedingung).

Jarl Waldemar Lindeberg (1876 – 1932) verallgemeinerte 1901 die Lyapunov-Bedingung zur Lindeberg-Bedingung und fand einen kürzeren Beweis.

György Pólya (1887 – 1985) prägte 1920 den Begriff zentraler Grenzwertsatz aufgrund seiner zentralen Bedeutung für die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Ein Problem, das nicht mit dem Satz von DE MOIVRE gelöst werden kann, aber mit dem Zentralen Grenzwertsatz von LAPLACE:

Rundungsfehler

Eine Bank tauscht hundert Millionen Geldbeträge von DM in Euro gemäß der Regel $1\,\mathrm{Euro} = 1.95583\ \mathrm{DM}$ um. Das Euro-Ergebnis wird auf ganze Cent gerundet. (Beispiel: $50\,\mathrm{DM} = 25.56459406\,\mathrm{Euro} \approx 25.56\,\mathrm{Euro}$).

Wie ist der Gesamt-Rundungsfehler verteilt?

Innerhalb welcher Schranken bleibt er mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 Prozent?

Annahmen:

- Jeder einzelne Rundungsfehler (in Euro) ist eine auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgröße.
- Die 10^8 Fehler sind unabhängig.

Annahmen:

- Jeder einzelne Rundungsfehler (in Euro) ist eine auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgröße.
- Die 10^8 Fehler sind unabhängig.

Dann ist der Gesamtrundungsfehler (in Euro) gleich $X = X_1 + \cdots + X_{10^8}$, wobei $X_1, \dots, X_{10^8}$ unabhängige, auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgrößen sind.

Annahmen:

- Jeder einzelne Rundungsfehler (in Euro) ist eine auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgröße.
- Die 10^8 Fehler sind unabhängig.

Dann ist der Gesamtrundungsfehler (in Euro) gleich $X = X_1 + \cdots + X_{10^8}$, wobei $X_1, \dots, X_{10^8}$ unabhängige, auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgrößen sind. Sie haben den Erwartungswert Null und die Varianz $\frac{1}{3}0.005^2 = \frac{1}{12}10^{-4} = \frac{1}{120.000}$.

Annahmen:

- Jeder einzelne Rundungsfehler (in Euro) ist eine auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgröße.
- Die 10^8 Fehler sind unabhängig.

Dann ist der Gesamtrundungsfehler (in Euro) gleich $X = X_1 + \cdots + X_{10^8}$, wobei $X_1, \ldots, X_{10^8}$ unabhängige, auf $[-0.005, 0.005]$ gleichverteilte Zufallsgrößen sind. Sie haben den Erwartungswert Null und die Varianz $\frac{1}{3}0.005^2 = \frac{1}{12}10^{-4} = \frac{1}{120.000}$.

Nach dem ZGWS gilt

$$R \approx \sqrt{10^8}\frac{1}{\sqrt{120.000}}\mathcal{N} = \frac{100}{\sqrt{12}}\mathcal{N}.$$

Nun kann man in einer Tabelle der Werte der Normalverteilung ablesen. Zum Beispiel gilt

$$\mathbb{P}(R \leq 72) \approx 0,99,$$

also verliert oder gewinnt die Bank mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,99$ höchstens 72 Euro!