MARTIN–LUTHER–UNIVERSITÄT
HALLE–WITTENBERG
FACHBEREICH MATHEMATIK UND INFORMATIK
INSTITUT FÜR NUMERISCHE MATHEMATIK

Diplomarbeit

Numerische Behandlung des inversen Elektrischen Impedanz - Tomographie - Problems

Vorgelegt von: Volker John
(Fachbereich Mathematik und Informatik)

Betreut von: Dr. O. Knoth
(Institut für Troposphärenforschung e.V. Leipzig)

Gutachter: Prof. Dr. habil. H. Schwetlick
Technische Universität Dresden
Fachbereich Mathematik

Dr. O. Knoth
Institut für Troposphärenforschung e.V.
Leipzig

Halle/Saale im August 1992

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Die Problemstellung

In dieser Arbeit wird das folgende inverse Problem untersucht : Kann man eine unbekannte Leitfähigkeit $\gamma(x)$ innerhalb eines Körpers Ω durch statische Messungen an der Oberfläche bestimmen?

Diese Frage hat einen praktischen Hintergrund. So versucht die sogenannte Elektrische-Impedanz-Tomographie (EIT) die innere elektrische Leitfähigkeit eines inhomogenen Körpers durch Niedrigfrequenz-Spannungs- und Strommessungen auf der Oberfläche zu bestimmen. Diese Technik ist unter verschiedenen Namen bekannt, z.B. Computer-Impedanz-Tomographie oder angewandte Potentialtheorie. Anwendungen ergeben sich in der Biomedizin und der Geophysik.

1.2 Die mathematische Formulierung des Problems

Wir betrachten einen inhomogenen, leitenden Körper mit einer bekannten Gestalt Ω. Im Niedrigfrequenzbereich (oder bei direkten elektrischen Strommessungen) sind das

Stromfeld $J(x)$ und das elektrische Feld $E(x)$ durch die Kirchhoffschen Gesetze

$$\nabla \cdot J = 0\,, \qquad \nabla \times E = 0 \tag{1.1}$$

und das Ohmsche Gesetz

$$J(x) = \gamma(x)E(x) \tag{1.2}$$

verbunden. Dabei ist $\gamma(x)$ die Leitfähigkeit. Wir nehmen an, daß der Körper isotrop ist, d.h. die Leitfähigkeit ist unabhängig von der Richtung, elektrische Schwingungen breiten sich von einem Punkt in alle Richtungen und mit der gleichen Geschwindigkeit aus. Damit ist die Leitfähigkeit nur eine Funktion des Ortes und eine positive skalare Größe. Da $\nabla \times E = 0$ ist, ist E ein konservatives Feld und besitzt damit ein Potential. Es läßt sich in der Form

$$E = -\nabla u \tag{1.3}$$

darstellen, wobei u die Spannung ist. Die Gleichungen (1.1) – (1.3) sind äquivalent zu einer einzigen elliptischen Gleichung für u:

$$\nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0 \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.4}$$

Dies folgt durch Einsetzen und dadurch, daß ein Potential genau dann existiert, wenn ein konservatives Kraftfeld vorliegt.

Falls $\gamma(x)$ bekannt ist, spricht man vom direkten Problem, über die Lösbarkeit der verschiedenen Randwertaufgaben siehe Abschnitt 1.3.

Wir formulieren das inverse Problem in folgender allgemeiner Form: Sei $\Omega \subset R^n$, $n \geq 2$, ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand (siehe Abschnitt 1.3). Es wird der elliptische Differentialoperator

$$L_\gamma = \nabla \cdot \gamma \nabla \qquad \gamma(x) \in L^\infty(\Omega) \text{ mit } 0 < a \leq \gamma \text{ f.ü.} \tag{1.5}$$

betrachtet. Gegeben sei ein Modell, in dem die Gleichung

$$L_\gamma u = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1.6}$$

gilt, sowie alle möglichen Paare von Randwerten

$$u|_{\partial\Omega} = f(x) \tag{1.7}$$

und

$$\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = \Lambda_\gamma f(x) = g(x) \tag{1.8}$$

bekannt sind. Gesucht ist $\gamma(x)$ in Ω. Wir haben es also mit einer inversen Aufgabe zur Parameteridentifizierung zu tun. Die Stromdichten auf dem Rand müssen der Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} dS = 0 \tag{1.9}$$

genügen.

Die in (1.8) definierte Abbildung Λ_γ

$$\begin{array}{llcl} \Lambda_\gamma & : H^{1/2}(\partial\Omega) & \mapsto & H^{-1/2}(\partial\Omega) \\ & f & \to & \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} \end{array} \tag{1.10}$$

heißt Dirichlet-Neumann-Abbildung. Diese Bezeichnung leitet sich aus den Namen "Dirichlet-Bedingung" für (1.7) und "Neumann-Bedingung" für (1.8) ab.

1.3 Die direkten Probleme

Als direkte Probleme bezeichnet man diejenigen Probleme, bei denen die Leitfähigkeit γ sowie Randdaten gegeben sind. Gesucht ist u. Nach der Art der gegebenen Randdaten unterscheidet man drei direkte Probleme :

$$\begin{array}{rcl} u|_{\partial\Omega} = f & - & \text{Dirichletproblem,} \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = g & - & \text{Neumannproblem,} \\ \alpha u + \beta\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} = h & - & \text{gemischte oder 3. Randwertaufgabe.} \end{array}$$

Für diese Arbeit sind nur das Dirichlet- und das Neumannproblem von Interesse.

Untersuchungen über die Lösbarkeit dieser Probleme findet man z.B. in [Tri72], §29, oder in [Wla72]. Dazu werden in beiden Fällen zuerst die Probleme mit homogenen Randbedingungen betrachtet. Man untersucht die Eigenwertaufgaben

$$-L_\gamma u = \lambda u$$

mit dem Definitionsbereich

$$\{u \in C_0^\infty(\Omega)\}$$

für das Dirichletproblem und

$$\left\{ u \in \overline{C}^\infty(\Omega),\, \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_{\partial\Omega} = 0 \right\}$$

für das Neumannproblem. Bei der Untersuchung dieser Eigenwertprobleme erhält man folgenden

Satz 1.1 *L_γ ist ein symmetrischer, selbstadjungierter Operator. Seine Eigenwerte sind sämtlich reell, es gibt keinen endlichen Häufungspunkt. Die Eigenfunktionen können sämtlich orthogonal zueinander gewählt werden. Beim Dirichletproblem sind alle Eigenwerte positiv. Beim Neumannproblem sind alle Eigenwerte nichtnegativ.* 0 *ist einfacher Eigenwert, die zugehörige Eigenfunktion ist die Konstante.*

Mit Hilfe dieser Ergebnisse werden zunächst Lösbarkeitsuntersuchungen für die Probleme mit homogenen Randbedingungen vorgenommen. Hat man inhomogene Randbedingungen, so werden diese hinreichend glatt in Ω fortgesetzt. Unter Benutzung dieser Fortsetzung kann man die Probleme mit inhomogenen Randbedingungen in Probleme mit homogenen Randbedingungen und veränderter rechter Seite umformen und die für die Probleme mit homogenen Randbedingungen gewonnenen Ergebnisse anwenden. Man erhält

Satz 1.2 *Sei $\Omega \in R^n$ ein beschränktes Gebiet mit hinreichend glattem Rand, $\gamma \in L^\infty(\Omega)$ und $\gamma > 0$ in Ω.*

Dann ist die Dirichletaufgabe

$$\begin{aligned} L_\gamma u = \nabla \cdot \gamma \nabla u &= 0 \\ u|_{\partial\Omega} &= f, \end{aligned}$$

f hinreichend glatt, eindeutig lösbar.

Die Lösung der Neumannaufgabe

$$\begin{aligned} L_\gamma u = \nabla \cdot \gamma \nabla u &= 0 \\ \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\Omega} &= g, \end{aligned}$$

g hinreichend glatt, ist unter der Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} g dS = 0$$

bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt.

Die Formulierung " mit hinreichend glattem Rand " ist gewählt worden, da eine genaue Definition der Glattheit eines Randes langwierig und für diese Arbeit unwichtig ist. Es ist beispielsweise hinreichend, wenn $\partial\Omega$ lokal als lipschitzstetige Funktion dargestellt werden kann. Für Würfel und allgemeine Polyederbereiche gilt Satz 1.2. Die topologischen Eigenschaften von Ω benötigt man z.B. für die Gültigkeit der Greenschen Formeln oder die Gültigkeit von Spursätzen. Ebenfalls ist es für diese Arbeit nicht notwendig, auf die "hinreichend glatten Randbedingungen" genauer einzugehen. Bei Testrechnungen sind die Dirichletdaten immer stetig gewählt, die Neumanndaten stückweise stetig. Für so gewählte Randbedingungen gilt Satz 1.2.

Die Aussagen der Sätze 1.1 und 1.2 gelten auch für endlichdimensionale Approximationen des Operators $L\gamma$, wie sie aus dem Ritzschen Verfahren oder dem Verfahren von Galerkin resultieren.

Kapitel 2

Arbeiten zur mathematische Behandlung des inversen EIT - Problems

Man kann die Arbeiten, die sich mit mathematischen Problemen des inversen EIT - Problems befassen im wesentlichen in zwei Kategorien unterteilen. Das sind zum einen Arbeiten, die sich mit der Frage der Identifizierbarkeit der Leitfähigkeit befassen (Abschnitt 2.1) und zum anderen Arbeiten, die numerische Verfahren zur Identifizierung der Leitfähigkeit vorstellen (Abschnitt 2.2). In diesem Kapitel sollen wichtige bisher erzielte Ergebnisse kurz vorgestellt werden. Einen Überblick über praktische Fragen im Zusammenhang mit dem inversen EIT - Problem, wie z.B. die Beschaffung von Meßdaten, gibt [Web90].

2.1 Zur Identifizierbarkeit der Leitfähigkeit

In diesem Abschnitt werden einige Ergebnisse von Arbeiten über die Identifizierbarkeit von $\gamma(x)$ zusammengestellt. Dabei wird die Frage untersucht, ob die Mengen aller möglichen Paare von Randdaten $\{(u|_{\partial\Omega}, \gamma\frac{\partial u}{\partial\nu}|_{\partial\Omega})\}$ für zwei verschiedene Leitfähigkeiten $\gamma_1(x)$ und $\gamma_2(x)$ aus ein und derselben Menge (z.B. aus ein und demselben Funktionenraum) von Funktionen gleich sein können.

2.1.1 Der eindimensionale Fall

In diesem Abschnitt wird gezeigt, daß man für $n = 1$ die Leitfähigkeit $\gamma(x)$ nicht allein aus der Kenntnis von Meßwerten am Rand identifizieren kann. Als konkretes Modell können wir uns einen Draht vorstellen, bei welchem Spannung $u(x)$ und Stromfluß $\gamma(x)u'(x)$ an den Enden bekannt bzw. gemessen worden sind. O.B.d.A. sei $\Omega = [0, 1]$ und $p(x)$ der Widerstand als Funktion des Ortes. Der Gesamtwiderstand eines Drahtstückes im Intervall $[a, b]$ ist durch

$$R_{[a,b]} = \int_a^b p(x)dx \tag{2.1}$$

gegeben. Diese Formel kann man als Definition für $p(x)$ nehmen. Die Leitfähigkeit definieren wir als

$$\gamma(x) = 1/p(x).$$

Für $n = 1$ geht (1.6) in die gewöhnliche Differentialgleichung

$$(\gamma(x)u'(x))' = 0 \tag{2.2}$$

über.

Satz 2.1 *Für $n = 1$ kann man durch Randmessungen nur den Mittelwert von $1/\gamma$, also den Gesamtwiderstand des Drahtes bestimmen. M.a.W., γ_1 und γ_2 ergeben dieselben Meßwerte auf dem Rand, wenn sie dasselbe harmonische Mittel besitzen.*

Beweis: An den Enden des Drahtes kann man jeweils Spannung und Stromfluß messen und erhält das 4-Tupel

$$\{u(0), \gamma(0)u'(0), u(1), \gamma(1)u'(1)\}.$$

Wir untersuchen zunächst, wie viele von diesen vier Meßgrößen unabhängig sind. Die Gleichung (2.2) ist linear, d.h.

$$(\gamma(x)[au_1(x) + bu_2(x)]')' = a(\gamma(x)u_1'(x))' + b(\gamma(x)u_2'(x))'.$$

$u(x) \equiv const$ ist für jedes γ eine Lösung von (2.2). O.B.d.A. können wir somit

$$u(0) = 0 \tag{2.3}$$

setzen. Da die Gleichung homogen ist, können wir ebenso o.B.d.A.

$$u(1) = 1 \tag{2.4}$$

annehmen. Falls nämlich $u(x)$ eine Lösung von (2.2) ist, ist auch

$$\frac{u(x) - u(0)}{u(1) - u(0)} =: \bar{u}(x)$$

eine Lösung von (2.2) mit $\bar{u}(0) = 0$ und $\bar{u}(1) = 1$. Es gilt $u(0) \neq u(1)$, da sonst kein Strom fließt. Durch Integration von (2.2) erhält man schließlich

$$\gamma(0)u'(0) = \gamma(1)u'(1). \tag{2.5}$$

Aus (2.3)-(2.5) folgt, daß tatsächlich nur eine unabhängige Meßgröße vorhanden ist., z.B. $\gamma(0)u'(0)$. Damit sind alle Informationen über $\gamma(x)$ in einer einzigen Meßgröße enthalten, nämlich im Stromfluß gemäß der Potentialdifferenz über dem Draht. Wegen $\gamma(x)u'(x) = const$ (Folgerung aus (2.2)) gilt

$$\left(\frac{u(x)}{\gamma(x)u'(x)}\right)' = \frac{\gamma(x)(u'(x))^2}{\gamma^2(x)(u'(x))^2} = \frac{1}{\gamma(x)}.$$

Mit (2.1) folgt

$$R_{[0,1]} = \int_0^1 \frac{1}{\gamma(x)} dx = \left.\frac{u(x)}{\gamma(x)u'(x)}\right|_0^1 = \frac{1}{\gamma(1)u'(1)} = \frac{1}{\gamma(0)u'(0)}.$$

Mit Hilfe der einen unabhängigen Meßgröße kann man also nur das harmonische Mittel von $\gamma(x)$ bestimmen. □

2.1.2 Der mehrdimensionale Fall

Die Pionierarbeit auf dem Gebiet der Identifizierbarkeit stammt von Calderon, [Cal80]. Er gab eine Methode zur näherungsweisen Berechnung von $\gamma(x)$, falls $\gamma(x)$ fast konstant und hinreichend glatt ist, an.

Eine Flut von Arbeiten zum Thema Impedanztomographie setzte mit einem Artikel von Kohn und Vogelius [KV84a] ein. In dieser Arbeit wurde die Identifizierbarkeit für eine reell analytische Leitfähigkeit gezeigt. Der Beweis wurde indirekt geführt. Man nahm an, daß zwei verschiedene reell analytische Leitfähigkeiten die gleiche Menge von Paaren von Dirichlet- und Neumanndaten liefern. Durch geschickte Wahl der Dirichletdaten und mit Hilfe des Permanenzprinzipes für analytische Funktionen wurde diese Annahme zum Widerspruch geführt. Dazu wurde eine Folge von Funktionen $\{f_i(x)\}_{i=1}^{\infty} \in C^{\infty}(\partial\Omega)$ konstruiert, deren Träger für $i \to \infty$ auf einen Randpunkt zusammenschrumpft und deren Elemente f_i in der Umgebung dieses Punktes stark oszillierend sind. Der Beweis ist recht lang, aber relativ elementar. Inzwischen gibt es kürzere Beweise, die jedoch einen anspruchsvollen mathematischen Apparat benutzen, vgl. [SU]. Basierend auf [KV84a] zeigten Kohn und Vogelius in [KV85] die Identifizierbarkeit von $\gamma(x)$ unter der Voraussetzung, daß $\gamma(x)$ stückweise analytisch ist. Diese Ergebnisse gelten für $n \geq 2$.

Bedeutende Arbeiten zum Thema der Identifizierbarkeit stammen von Sylvester und Uhlmann. In [SU87] bewiesen sie die Identifizierbarkeit für $\gamma(x) \in C^{\infty}(\bar{\Omega})$ und $n \geq 3$. Sie benutzten eine Idee, die bereits Calderon in seiner Arbeit verwandte. Für den Beweis konstruierten sie exponentiell wachsende Lösungen von $L_\gamma u = 0$ in Ω der Gestalt

$$u = e^{x\cdot\xi}\gamma^{-1/2}(1 + \psi(x,\xi)), \tag{2.6}$$

wobei $\xi \in C^n, \xi \cdot \xi = 0$ und $\psi \to 0$ für $|\xi| \to \infty$ gleichmäßig in Ω. Für $n \geq 3$ hat man zusätzliche Freiheitsgrade, die genutzt werden können. Für gegebenes $k \in R^n$ und $r > 0$ kann man $\xi_i \in C^n$, $n \geq 3$, so finden, daß $|\xi_i| \geq r$, $\xi_i \cdot \xi_i = 0$, $i = 1, 2$ und

$e^{x\cdot\xi_1}e^{x\cdot\xi_2} = e^{ix\cdot k}$ gilt. Wesentliches Instrument beim Beweis der Identifizierbarkeit ist die Fouriertransformation.

Diese Vorgehensweise läßt sich jedoch nur für $n \geq 3$ durchführen. Das hängt damit zusammen, daß man zur Konstruktion von Lösungen der Gestalt (2.6) im Fall $n \geq 3$ Freiheitsgrade ausnutzen kann, die man im Fall $n = 2$ nicht hat. Der Fall $n = 2$ ist bis jetzt noch relativ wenig geklärt. Einige Ergebnisse stammen von Sylvester, Uhlmann und Sun, zum Beispiel [Sun89].

Im Fall $n \geq 3$ kann man auch unter abgeschwächten Glattheitsanforderungen an $\gamma(x)$ die Identifizierbarkeit zeigen, vgl. dazu [Ale88], [Isa88], [Nac88], [NJU88].

Ebenfalls läßt sich durch Beispiele zeigen, daß die Leitfähigkeit im anisotropen Fall nicht identifizierbar ist, vgl. [KV84b]. In diesem Fall ist $\gamma(x)$ keine skalare Funktion, sondern eine symmetrische, positiv definite Matrix.

2.2 Verfahren zur Rekonstruktion von Leitfähigkeiten

2.2.1 Herangehensweisen bei der Schätzung von Parametern

Die Ausführungen dieses Abschnittes sind an [BK89] angelehnt.

Man kann im allgemeinen nicht erwarten, eine Parameteridentifizierungsaufgabe explizit zu lösen. Deswegen bietet es sich an, diese Aufgaben als Optimierungsprobleme zu behandeln. Man betrachtet die Minimierung eines Fehlerkriteriums, eines Funktionals, $I(\gamma, u)$ über eine Menge von zulässigen Paaren (u, γ). Dabei kann man zwei Arten von Fehlerkriterien unterscheiden: Das "Gleichungsfehlerkriterium" und das "Ausgabefehlerkriterium".

Beim Gleichungsfehlerkriterium (equation error criterion) versucht man, (u, γ) so zu bestimmen, daß die vorgegebenen Randbedingungen (1.7) und (1.8) erfüllt sind und die elliptische Differentialgleichung (1.6) "möglichst gut gelöst" wird. Dazu wird man ein Funktional minimieren, welches ein Maß für das Erfülltsein von (1.6) ist.

Beim Ausgabefehlerkriterium (output error criterion, fit-to-data criterion) bestimmt man (u, γ) so, daß die Gleichung (1.6) zu einer der vorgegebenen Randbedingungen erfüllt ist. Ziel ist es, ein Paar (u, γ) so zu finden, daß der Defekt in der anderen Randbedingung minimiert wird.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß in den obigen Betrachtungen solche Fragen wie Modellfehler, Meßfehler oder verfügbare Datenmenge ausgeklammert sind. Betrachtungen zu den oben skizzierten Herangehensweisen, die auch diese Fragen beinhalten, findet man in [BK89]. Im Einzelfall können diese Fragen darüber entscheiden, welche Methode bei der Lösung einer Parameterschätzaufgabe günstiger ist. Im Fall der Impedanztomographie wurden beide Herangehensweisen getestet. Beide Methoden führen letztendlich auf Optimierungsaufgaben. Daneben gibt es noch vollkommen andere Herangehensweisen zur Lösung des inversen EIT - Problems, z.B. basierend auf einer Linearisierung des Problems. Im folgenden werden eine Reihe von Algorithmen kurz vorgestellt, ohne jedoch Anspruch auf Vollständigkeit erheben zu wollen.

2.2.2 Verfahren, die das Gleichungsfehlerkriterium benutzen

Die erste Arbeit auf diesem Gebiet stammt von Wexler, Fry und Neuman [WFN85]. Das zu minimierende Funktional hat die Gestalt

$$I(\gamma; u_1, \cdots, u_S; J_1, \cdots, J_S) = \sum_{i=1}^{S} \int_\Omega (J_i + \gamma \nabla u_i) \cdot (J_i + \gamma \nabla u_i) dx, \tag{2.7}$$

wobei Ω, J, γ und u_i wie oben definiert sind und S die Anzahl der Messungen ist. Aus (1.2) und (1.3) folgt, daß der Minimalwert von (2.7) Null ist. Der Algorithmus in [WFN85] hat folgende Grundstruktur :

Sei $\{\Omega_j\}_{j=1}^{L}$ eine Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen. $\gamma(x)$ wird auf jeder Teilmenge Ω_j als konstant angesehen. Eine Schätzung $\gamma(x)_j^k$ sei in jeder Teilmenge $\Omega_j \subset \Omega$ gegeben.

1. Berechne u_i und $J_i = \gamma \nabla u_i$ für Neumannbedingungen, $i = 1(1)S$.
2. Berechne u_i für Dirichletbedingungen.
3. Berechne $\gamma(x)_j^{k+1}$ mit J_i aus 1. und u_i aus 2., $i = 1(1)S$ durch

$$\gamma(x)_j^{k+1} = -\left(\sum_{i=1}^{S} \int_{\Omega_j} J_i \cdot \nabla u_i dx\right)\left(\sum_{i=1}^{S} \int_{\Omega_j} \nabla u_i \cdot \nabla u_i dx\right)^{-1}. \tag{2.8}$$

(2.8) erhält man direkt aus (2.7). Im ersten Schritt benötigt man noch eine Normierungsbedingung für u_i, $i = 1(1)S$ (Referenzpotential).

Einen von der Grundstruktur her gleichen Algorithmus entwickelten Kohn und McKenney in [KM90]. Allerdings wird dort das Funktional

$$\begin{aligned} &I(\gamma; u_1, \cdots, u_S; J_1, \cdots, J_S) = \\ &\sum_{i=1}^{S} \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\gamma^{1/2} \nabla u_i + \gamma^{-1/2} J_i) \cdot (\gamma^{1/2} \nabla u_i + \gamma^{-1/2} J_i) dx \end{aligned} \tag{2.9}$$

über alle Argumente und unter der Voraussetzung $\gamma(x) > 0$ minimiert. Das Minimum von (2.9) ist Null und wird von der Lösung des inversen EIT - Problems angenommen. Formulierung (2.9) läßt sich durch Umformungen und in abkürzender Weise als

$$I(\gamma, u, J) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} \int_{\Omega} \gamma |\nabla u_i|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum i = 1^S \gamma^{-1} |J_i|^2 dx + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^{S} J_i \cdot \nabla u_i dx \tag{2.10}$$

schreiben, $u = (u_1, \cdots, u_S)$, $J = (J_1, \cdots, J_S)$. Der letzte Term ist vollständig durch die Randbedingungen bestimmt (Greensche Formel und (1.1) anwenden), ist also für die Minimierung von (2.10) belanglos. Falls $\gamma(x)$ fest gewählt ist, sind die anderen beiden Terme von (2.10) entkoppelt. Die Minimierung des ersten Termes entspricht dem Dirichletschen Variationsprinzip, die des zweiten Termes dem Thompsonschen Variationsprinzip. Damit läßt sich der Algorithmus wie folgt formulieren:

Sei $\{\Omega_j\}_{j=1}^{L}$ eine Zerlegung von Ω in disjunkte Teilmengen. $\gamma(x)$ wird auf jeder Teilmenge Ω_j als konstant angesehen. Eine Schätzung $\gamma(x)_j^k$ sei in jeder Teilmenge $\Omega_j \subset \Omega$

gegeben.

1. Minimiere (2.10) über J_i zu $\nabla \cdot J_i = 0$ und $-J_i \cdot \nu|_{\partial\Omega} = \Lambda_\gamma f_i$.
2. Minimiere (2.10) über u_i zu $u_i|_{\partial\Omega} = f_i$.
3. Minimiere (2.10) über γ mittels

$$\gamma_j^{k+1} = \left(\sum_{i=1}^{S} \int_{\Omega_j} |J_i|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{S} \int_{\Omega_j} |\nabla u_i|^2 dx \right)^{-1/2} . \tag{2.11}$$

(2.11) läßt sich leicht aus (2.10) ableiten. Bei Schritt 1 und 2 handelt es sich nur um die Variationsformulierung von Schritt 1 und 2 aus [WFN85].

Die beiden hier vorgestellten Algorithmen vermindern den Wert von I bei jedem Schritt. Sie zeigen allerdings in der Nähe des Minimums eine sehr langsame Konvergenzgeschwindigkeit. Aus diesem Grunde entwickelten Kohn und McKenney in [KM90] noch einen anderen Algorithmus, ein modifiziertes Newtonverfahren. Beim Newtonverfahren handelt es sich um die Minimierung einer quadratischen Approximation des Funktionals (2.9). Dazu wird (2.9) bis zur zweiten Ordnung im Punkte $\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma, E = E_0 + \delta E$ mit $(E = \nabla u), J = J_0 + \delta J$ entwickelt. Die Modifizierung des Verfahrens besteht in einer Modifizierung der Hessematrix, um im Verfahren positive Definitheit zu garantieren. Der wesentliche Bestandteil eines Schrittes des Verfahrens besteht dann in der Lösung eines quadratischen Minimierungsproblems, welches S Spannungen und S Ströme beinhaltet. Die Lösung erfolgt mit einem PCG-Verfahren.

Brandt, McCormick und Wade betrachten in [BMW] die Minimierung von (2.10) im 2-dimensionalen. Sie wenden jedoch ein Multigridverfahren (Multilevel Method) zur Lösung an. Bei der Entwicklung des Verfahrens wird besonders beachtet, daß es sich um ein schlecht gestelltes (ill-posed) Problem handelt. Dies hängt damit zusammen, daß nur endlich viele Messungen vorhanden sind und bei der numerischen Auswertung Rundungsfehler auftreten. Die Behandlung des schlecht gestellten Problems erfolgt mit einer speziellen Wahl des Gitters. Das Gesamtgitter ist eine Zusammensetzung von globalen und lokalen Gittern dergestalt, daß sich im Inneren des Gebietes ein sehr grobes und zum Rande hin ein feineres Gitter ergibt.

2.2.3 Verfahren, die das Ausgabefehlerkriterium benutzen

Eine Methode, die auf dem Ausgabefehlerkriterium basiert, stammt von Yorkey, Webster und Tompkins [YWT87]. An M Meßelektroden werden Ströme angelegt und man erhält als Beobachtung den Spannungsvektor $\bar{f} \in R^M$. In der Arbeit wird die Widerstandsverteilung r benutzt, die das Reziproke der Leitfähigkeitsverteilung ist. Sei $f \in R^M$ der aus einer geschätzten Widerstandsverteilung berechnete Spannungsvektor an den Elektroden. Dann wird die Aufgabe

$$\min_r \frac{1}{2}(f - \bar{f})^T(f - \bar{f})$$

betrachtet. Zur Lösung dieser Aufgabe wird ein Newtonverfahren angewandt. Die Hessematrix wird mittels $(f')^T f'$ approximiert. Damit ergibt sich das Verfahren

$$r^{k+1} = r^k - \left[f'(r^k)^T f'(r^k)\right]^{-1} \left[f'(r^k)\right]^T \left[f(r^k) - \bar{f}\right].$$

f wird mit Hilfe der FEM berechnet. Es werden zwei verschiedene Arten der numerischen Berechnung von f' angegeben. Da $[f']^T f'$ im allgemeinen schlecht konditioniert ist, benutzten die Autoren die Methode von Marquardt zur Lösung des linearen Gleichungssystems.

Dobson untersucht in [Dob90]

$$\min_{\rho \in L^2(\Omega')} \frac{1}{2} \left\|F(\rho + \gamma') - \bar{f}\right\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \frac{\beta}{2} \left\|B\rho\right\|^2_{L^2(\Omega')} \tag{2.12}$$

mit $\gamma = \rho + \gamma', \bar{f}$ - Meßwerte der Spannung, $\beta \in (0, \infty), \Omega' \subset\subset \Omega$. B ist ein möglicherweise unbeschränkter Operator $L^2(\Omega') \mapsto L^2(\Omega')$. Es wird vorausgesetzt, daß die Lösung $\tilde{\gamma}$ in einer Umgebung des Randes $\Omega \setminus \Omega'$ bekannt ist (z.B. die Leitfähigkeit der Haut). Weiter ist

$$F : D \subset L^2(\Omega) \;\; \mapsto \;\; L^2(\partial\Omega)$$

$$\gamma \rightarrow \Lambda_\gamma^{-1}\left(\gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}\right)$$

mit $D = \{\gamma \in C^\infty : \gamma(x) \geq a > 0, supp(\gamma - \tilde{\gamma}) \subset \Omega'\}$. Der Regularisierungsoperator B wird mit Hilfe einer Wavelet-Basis konstruiert. Zur Minimierung von (2.12) wird eine globalisierte Version des Gauß-Newton-Verfahrens angewandt, das sogenannte Levenberg-Marquardt-Verfahren. Dobson zeigt die lokale und q-lineare Konvergenz dieses Verfahrens bei der Anwendung auf (2.12) unter einfachen Voraussetzungen, die man während der Iteration leicht überprüfen kann.

In [CIN⁺90] wird ein Algorithmus namens NOSER (Newton's One Step Error Reconstructor) zur Lösung des inversen EIT - Problems vorgestellt. Es werden Messungen an M Elektroden vorgenommen, man hat $M - 1 = S$ unabhängige Meßpaare. Die Ströme an den Randelektroden werden vorgegeben. Sie haben der Einfachheit halber die Gestalt

$$g_{i,l} = \begin{cases} \cos((2\pi i l)/(S+1)) & i = 1, 2, \cdots, (S+1)/2 \\ \sin((2\pi i l)/(S+1) - \pi l) & i = (S+1)/2 + 1, \cdots, S \end{cases}$$

(l-te Komponente im i-ten aufgeprägten Strom). Ω ist eine Kreisscheibe, die in finite Elemente unterteilt ist. Die Spannungsvektoren $\bar{f}_i$, $i = 1(1)S$, werden gemessen, die Vektoren f_i, $i = 1(1)S$, mit Hilfe der Randströme und der konstanten Leitfähigkeit γ_0 berechnet. Die f_i kann man auf Grund der speziellen Gestalt der aufgeprägten Ströme explizit aus diesen berechnen. Ziel ist die Minimierung von

$$F(\gamma) = \sum_{i=1}^{S} \|\bar{f}_i - f_i\|^2.$$

Dazu wird ein Ein-Schritt-Newtonverfahren benutzt, d.h. man erhält durch die üblichen Überlegungen

$$\gamma^1 = \gamma^0 - \left[F''(\gamma^0)\right]^{-1} F'(\gamma^0).$$

F'' ist schlecht konditioniert. In NOSER wird die Levenberg - Marquardt - Approximation

$$F''_{kl} \approx 2 \sum_{i=1}^{S} \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_k} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_l} + \alpha \left(\sum_{i=1}^{S} \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_k} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \gamma_l} \right) \delta_{k,l}$$

verwendet ($\delta_{k,l}$ - Kronecker - Symbol). Der Code rekonstruiert $\gamma(x)$ nicht genau, aber er liefert oft brauchbare Vorstellungen der Gestalt von $\gamma(x)$.

Ausgangspunkt von Jiang in [Jia90] ist die gewöhnliche Output-Least-Square Formulierung

$$\min_{\gamma} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{S} ||f_i - \bar{f}_i||^2_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \tag{2.13}$$

über eine geeignete Klasse von Leitfähigkeiten γ. In der Implementierung des Verfahrens wurde in (2.13) neben der diskreten $H^{1/2}$-Norm auch die l^2-Norm benutzt, ohne das signifikante Unterschiede auftraten. Um die Stetigkeit der Abbildung von den Beobachtungswerten auf die gesuchte Leitfähigkeit zu garantieren, wird in (2.13) noch ein Regularisierungsterm eingeführt. Zur Lösung dieses Minimierungsproblems verwendet Jiang ein modifiziertes oder erweitertes Lagrange-Verfahren (Augmented Lagrangian Method). Dadurch erhält man eine Folge von Minimierungen eines Funktionals. Jiang zeigte die Lösbarkeit des Output - Least - Square Problems für die geeignet gewählte Klasse von Leitfähigkeiten, die Existenz der Lagrange-Multiplikatoren und die Konvergenz des Algorithmus unter gewissen Voraussetzungen. Er erhielt jedoch keine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit. Die Menge der $\{f_i\}$ wird durch eine FEM-Approximation der elliptischen Gleichung berechnet, die Folge der Funktionalminimierungen mit dem PCG-Verfahren gelöst.

2.2.4 Andere Verfahren

Ein Team von Wissenschaftlern stellt in [CISI91], [CI90] und in [CIS+91] einen sogenannten “Layer-Stripping“ Algorithmus (ungefähr “Schichten abziehenden Algorithmus“) vor, der auf invarianter Einbettung basiert. Die Wahl des Namens wird bei Betrachtung des Algorithmus klar. Sei $\Omega \subset R^2$ eine Scheibe mit Radius ρ. Es werden Polarkoordinaten (ρ, θ) eingeführt. Λ_γ^{-1} sei bekannt (z.B. durch Messungen). Die Definition von Λ_γ^{-1} wird auf alle $\rho \in R$ ausgedehnt. Dann hat der Algorithmus folgende Grundstruktur :

1. Messe $\Lambda_\gamma^{-1}(\rho_0)$ am Rande des Körpers.
2. Ermittle γ am Rande ρ_0.
3. Fortsetzung von Λ_γ^{-1} ins Innere durch finite Differenzenapproximation

$$\Lambda_\gamma^{-1}(\rho_0 - \Delta) = \Lambda_\gamma^{-1}(\rho_0) - \Delta \frac{\partial \Lambda_\gamma^{-1}}{\partial \rho}$$

mit

$$\frac{\partial \Lambda_\gamma^{-1}}{\partial \rho} = \frac{1}{\gamma} + \frac{\Lambda_\gamma^{-1}}{\rho} + \frac{\Lambda_\gamma^{-1}}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\gamma \frac{\partial \Lambda_\gamma^{-1}}{\partial \theta} \right).$$

4. Ersetze ρ_0 durch $\rho_0 - \Delta$ (ziehe sozusagen die äußere Schicht des Körpers ab) und gehe zu Schritt 2.

Bei diesem Algorithmus handelt es sich im Gegensatz zu den bisher vorgestellten um kein Iterationsverfahren.

2.2.5 Abschließende Bemerkungen zu diesem Kapitel

Obwohl eine gewisse Anzahl von Algorithmen zur numerischen Behandlung des inversen EIT - Problems existiert, gibt es noch viele unbefriedigende Aspekte. Viele Algorithmen wurden nur unter relativ einfachen Bedingungen getestet. So wurden Testrechnungen i.a. im R^2 durchgeführt, Ω war ein einfaches Gebiet (Kreisscheibe oder Quadrat). Es wurde mit synthetischen Daten einfacher Struktur gerechnet. Die meisten Algorithmen zeigten irgendwelche Nachteile, sei es Instabilität, hoher Aufwand oder langsame Konvergenz. Es gab nur einige vergleichende Testrechnungen. So hat der Algorithmus aus [YWT87] bessere Konvergenzeigenschaften als der Algorithmus aus [WFN85]. Dies ist allerdings nicht überraschend, da ein Newtonverfahren mit einem langsam konvergenten Verfahren verglichen wird. Der Layer-Stripping Algorithmus hat bei Testbeispielen bessere Ergebnisse als der vom gleichen Team entwickelte Code NOSER erzielt.

Es soll noch auf ein anderes Problem bei der numerischen Behandlung des inversen EIT - Problems hingewiesen werden. Da dieses Problem schlecht gestellt ist ("ill -

posed problem"), wird man zur numerischen Behandlung bei Verwendung bestimmter Algorithmen Regularisierung benötigen. Man kann aber kein allgemeines Rezept für eine effiziente und praktikable Regularisierungsmethode angeben. Bei der oft angewendeten Tychonov - Regularisierung fällt der Wahl des Regularisierungsparameters eine große Bedeutung zu. Dies kommt auch in mehreren der eben vorgestellten Arbeiten zum Ausdruck. Diese Wahl erfolgt oft heuristisch. So kann es notwendig sein, das Problem mehrmals, für unterschiedliche Regularisierungsparameter zu lösen, was natürlich eine enorme Steigerung des Aufwandes mit sich bringt.

Eng mit dem Problem der Bestimmung der Leitfähigkeit in einem Körper sind andere Aufgaben verbunden. Dies sind zum Beispiel die Identifizierung der Leitfähigkeit in einem Netzwerk oder die Bestimmung eines Gebietes D mit $\bar{D} \subset\subset \Omega$, auf dem die Leitfähigkeit ein bestimmtes Verhalten zeigt, unter der Voraussetzung, daß schon a-priori Informationen über γ im Inneren von Ω vorhanden sind.

Kapitel 3

Die Methode der finiten Elemente

In diesem Kapitel wird die numerische Behandlung elliptischer Randwertaufgaben mit Hilfe der Methode der finiten Elemente (FEM) beschrieben.

3.1 Einführung in die FEM

Die FEM ist eine weit verbreitete und gut bekannte Methode zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen. In diesem Absicht sollen die grundlegenden Ideen und die Herangehensweise beschrieben werden. Dabei wird sich auf [Sch84] und [GRT85] gestützt.

Alle Betrachtungen beziehen sich auf den R^2. Ein Punkt des R^2 ist ein Paar (x, y).

Ausgangspunkt der FEM ist die Minimierung der zu einer Randwertaufgabe gehörenden Extremalaufgabe, falls eine solche existiert. Für die Randwertprobleme des Operators L_γ existieren zugehörige Extremalaufgaben. Beim Dirichletproblem ist die zugehörige Extremalaufgabe

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \int_\Omega \gamma(x, y)(u_x^2 + u_y^2)dxdy \tag{3.1}$$

unter der Nebenbedingung

$$u = f(s) \text{ auf } \partial\Omega.$$

Im Fall des Neumannproblems ist die zugehörige Extremalaufgabe

$$\min_{u\in H^1(\Omega)} \left(\int_\Omega \gamma(x,y)(u_x^2+u_y^2)dxdy - \int_{\partial\Omega} \gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} udS \right). \tag{3.2}$$

In [Sch84], S.22 f., ist gezeigt, daß Lösungen der Extremalaufgabe notwendigerweise Lösungen der entsprechenden Randwertaufgabe sind.

Im Rahmen der FEM löst man die Aufgaben (3.1) und (3.2) für eine endlichdimensionale Approximation des Operators L_γ und in einem endlichdimensionalen Teilraum von $H^1(\Omega)$.

Im 1.Schritt wird das Grundgebiet Ω in einfache Teilelemente zerlegt, in sogenannte finite Elemente. In dieser Arbeit sind diese finiten Elemente samt und sonders Dreiecke.

Im 2.Schritt wählt man für die gesuchte Funktion in jedem Element einen Ansatz

$$u(x,y) = \sum_{i=1}^{p} c_i u_i(x,y).$$

Dabei ist p die Anzahl der Knotenpunkte des Elementes. In jedem Element sind die Koeffizienten $c_1,\ldots,c_p$ gesucht. Diese müssen so gewählt werden, daß für Ω eine stetige und stückweise stetig differenzierbare Gesamtfunktion resultiert. Damit ist diese Funktion sicher Element von $H^1(\Omega)$. Die Funktionen $u_i(x,y)$ sind Monome in x und y. Der Funktionsverlauf in einem Element wird durch Funktionswerte in bestimmten Punkten des Elementes, den sogenannten Knotenpunkten, ausgedrückt. Die benutzten Funktionswerte nennt man Knotenvariablen des Elementes. Man kann die Ansatzfunktion nun als Linearkombination von speziellen, linear unabhängigen Funktionen, den sogenannten Formfunktionen mit den Knotenvariablen als Koeffizienten darstellen :

$$u^{(e)}(x,y) = \sum_{i=1}^{p} u_i^{(e)} N_i^{(e)}(x,y).$$

Da dieser Ansatz insbesondere für die Knotenpunkte gelten muß, folgt

$$N_i^{(e)}(x_j^{(e)}, y_j^{(e)}) = \begin{cases} 1 \text{ für } j = i \\ 0 \text{ für } j \neq i \end{cases} . \tag{3.3}$$

Numeriert man die Knoten von 1 bis n durch, so erhält man zusammenfassend

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{n} u_i N_i(x, y). \tag{3.4}$$

Die Formfunktion $N_i(x, y)$ ist die Zusammensetzung derjenigen Elementformfunktionen $N_i^{(e)}$, die im Knotenpunkt P_i den Wert 1 annehmen. Wegen (3.3) ist $N_i(x, y)$ nur in einem kleinen Teilgebiet von Ω von Null verschieden.

Im 3.Schritt wird (3.4) in das zu minimierende Funktional eingesetzt, Randintegrale und Dirichletbedingungen werden ebenfalls berücksichtigt. Man erhält eine quadratische Funktion in den Knotenvariablen u_i :

$$\min_u \left\{ \frac{1}{2} u^T A u - d^T u \right\}.$$

Hierbei ist u der Vektor der Knotenvariablen, A eine symmetrische und Matrix und d der Koeffizientenvektor der linearen Terme. Die notwendige Bedingung für ein Minimum dieses Ausdrucks ist

$$Au - d = 0. \tag{3.5}$$

Das eben beschriebene Vorgehen entspricht dem Ritzschen Verfahren. Existiert für ein Randwertproblem zu einem Operator keine zugehörige Extremalaufgabe, so kann man die FEM mit Hilfe des Verfahrens von Galerkin anwenden.

3.2 Der quadratische Ansatz im Dreieckselement

Das Grundgebiet $\Omega \in R^2$ wird in Dreieckselemente zerlegt. Wir wählen den quadratischen Ansatz, d.h.

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y + c_4 x^2 + c_5 xy + c_6 y^2. \tag{3.6}$$

Eine quadratische Funktion (3.6) über einem Dreieck ist durch die Angabe ihrer Funktionswerte in den Eckpunkten und in den Mittelpunkten der Seiten eindeutig bestimmt.

Wir betrachten ein beliebiges Dreieck $T \in R^2$ mit den Ecken (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Es erweist sich als vorteilhaft, dieses Dreieck durch die lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

wobei $x_{21} = x_2 - x_1$ usw. ist, in das Einheitsdreieck T_0 mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ zu überführen. Die Funktionaldeterminante dieser Transformation ist

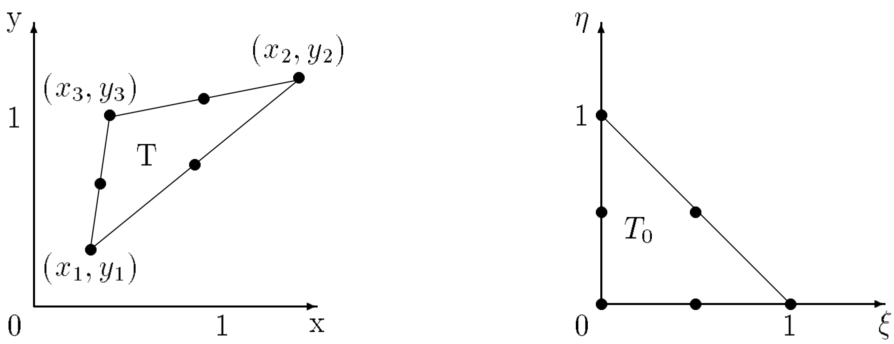


Abbildung 3.1: LINEARE TRANSFORMATION EINES DREIECKS AUF DAS EINHEITSDREIECK

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = x_{21}y_{31} - x_{31}y_{21} = 2|T| > 0,$$

mit $|T|$ als dem Flächeninhalt von T. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} y_{31} & y_{12} \\ x_{13} & x_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_1 \\ y - y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aus dieser Beziehung erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{y_{31}}{2|T|}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{y_{12}}{2|T|}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{x_{13}}{2|T|}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{x_{21}}{2|T|}.$$

Die Formfunktionen für den quadratischen Ansatz lauten

$$\begin{aligned} N_1(\xi,\eta) &= L_1(2L_1-1) \quad , \quad N_4(\xi,\eta) = 4L_1L_2, \\ N_2(\xi,\eta) &= L_2(2L_2-1) \quad , \quad N_5(\xi,\eta) = 4L_2L_3, \\ N_3(\xi,\eta) &= L_3(2L_3-1) \quad , \quad N_6(\xi,\eta) = 4L_1L_3, \end{aligned}$$

mit

$$L_1 = 1-\xi-\eta, \qquad L_2 = \xi, \qquad L_3 = \eta,$$

vgl. [Sch84],S. 91. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{\partial N_1}{\partial \xi} &= 4L_1\frac{\partial L_1}{\partial \xi} - \frac{\partial L_1}{\partial \xi} = -4L_1+1, \\
\frac{\partial N_2}{\partial \xi} &= 4L_2\frac{\partial L_2}{\partial \xi} - \frac{\partial L_2}{\partial \xi} = 4L_2-1, \\
\frac{\partial N_3}{\partial \xi} &= 4L_3\frac{\partial L_3}{\partial \xi} - \frac{\partial L_3}{\partial \xi} = 0, \\
\frac{\partial N_4}{\partial \xi} &= 4L_1\frac{\partial L_2}{\partial \xi} + 4L_2\frac{\partial L_1}{\partial \xi} = 4L_1-4L_2, \\
\frac{\partial N_5}{\partial \xi} &= 4L_2\frac{\partial L_3}{\partial \xi} + 4L_3\frac{\partial L_2}{\partial \xi} = 4L_3, \\
\frac{\partial N_6}{\partial \xi} &= 4L_1\frac{\partial L_3}{\partial \xi} + 4L_3\frac{\partial L_1}{\partial \xi} = -4L_3, \\
\frac{\partial N_1}{\partial \eta} &= 4L_1\frac{\partial L_1}{\partial \eta} - \frac{\partial L_1}{\partial \eta} = -4L_1+1, \\
\frac{\partial N_2}{\partial \eta} &= 4L_2\frac{\partial L_2}{\partial \eta} - \frac{\partial L_2}{\partial \eta} = 0, \\
\frac{\partial N_3}{\partial \eta} &= 4L_3\frac{\partial L_3}{\partial \eta} - \frac{\partial L_3}{\partial \eta} = 4L_3-1, \\
\frac{\partial N_4}{\partial \eta} &= 4L_1\frac{\partial L_2}{\partial \eta} + 4L_2\frac{\partial L_1}{\partial \eta} = -4L_2, \\
\frac{\partial N_5}{\partial \eta} &= 4L_2\frac{\partial L_3}{\partial \eta} + 4L_3\frac{\partial L_2}{\partial \eta} = 4L_2, \\
\frac{\partial N_6}{\partial \eta} &= 4L_1\frac{\partial L_3}{\partial \eta} + 4L_3\frac{\partial L_1}{\partial \eta} = 4L_1-4L_3.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Weiter ist

$$\int_T \gamma(x,y)(u_x^2+u_y^2)dxdy$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{T_0} \gamma(\xi,\eta)\left[(u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x)^2 + (u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y)^2\right] D d\xi d\eta \\
&= D\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta)(\xi_x^2 + \xi_y^2) u_\xi^2 d\xi d\eta + D\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta)(2\xi_x\eta_x + 2\xi_y\eta_y) u_\xi u_\eta d\xi d\eta \\
&\quad + D\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta)(\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\xi^2 d\xi d\eta \\
&= \frac{y_{31}^2 + x_{12}^2}{2|T|}\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi^2 d\xi d\eta + \frac{y_{31}y_{12} + x_{13}x_{21}}{2|T|} 2\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi u_\eta d\xi d\eta \\
&\quad + \frac{y_{12}^2 + x_{21}^2}{2|T|}\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi^2 d\xi d\eta \\
&= a\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi^2 d\xi d\eta + b2\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi u_\eta d\xi d\eta + c\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi^2 d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

Die Konstanten a, b, c hängen nur vom Dreieck T ab.

Nach (3.4) ist

$$
u(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{6} u_i N_i(\xi,\eta) = u^T \mathcal{N}(\xi,\eta),
$$

wobei mit $\mathcal{N} = (N_1, \ldots, N_6)$ der Vektor der Formfunktionen eingeführt wird. Es ist

$$
u_\xi(\xi,\eta) = u^T \mathcal{N}_\xi(\xi,\eta), \qquad u_\xi^2 = u^T \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_\xi^T u
$$

usw. und damit

$$
\begin{aligned}
\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi^2 d\xi d\eta &= u^T \left(\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) \mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_\xi^T d\xi d\eta\right) u = u^T S_1 u, \\
2\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\xi u_\eta d\xi d\eta &= u^T \left(\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta)(\mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_\eta^T + \mathcal{N}_\eta \mathcal{N}_\xi^T) d\xi d\eta\right) u = u^T S_2 u, \\
\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) u_\eta^2 d\xi d\eta &= u^T \left(\int_{T_0} \gamma(\xi,\eta) \mathcal{N}_\eta \mathcal{N}_\eta^T d\xi d\eta\right) u = u^T S_3 u.
\end{aligned}
$$

Die Integration über die Matrizen ist elementweise zu verstehen. Damit ergibt sich

$$
\int_T \gamma(x,y)(u_x^2 + u_y^2) dx dy = u^T(aS_1 + bS_2 + cS_3)u = u^T S_e u. \tag{3.9}
$$

S_e wird Elementmatrix genannt.

In der angegebenen Literatur ist nur der Fall $\gamma \equiv 1$ betrachtet worden. In diesem Fall sind S_1, S_2 und S_3 konstante Matrizen, die man etwa in [Sch84], S.76, findet. Wir nehmen an, daß die Werte von γ in den sechs Stützstellen des Dreiecks bekannt sind. Damit kann man γ durch eine quadratische Funktion der Gestalt

$$\gamma(x,y) = d_1 + d_2 x + d_3 y + d_4 x^2 + d_5 xy + d_6 y^2 \tag{3.10}$$

interpolieren. Nach der linearen Transformation (3.7) wird der Funktionswert $\gamma(x_1, y_1)$ nun im Punkt $(0,0)$ angenommen, der Funktionswert $\gamma(x_2, y_2)$ im Punkt $(1,0)$ usw.. Im folgenden wird für diese Funktionswerte als abkürzende Schreibweise $\gamma_{(0,0)}$, $\gamma_{(1,0)}$ usw. verwendet. Für den Ansatz (3.10) über T_0 erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccccl}
d_1 & & & & & & = & \gamma_{(0,0)} \\
d_1 & +\frac{1}{2}d_2 & & +\frac{1}{4}d_4 & & & = & \gamma_{(1/2,0)} \\
d_1 & +d_2 & & +d_4 & & & = & \gamma_{(1,0)} \\
d_1 & & +\frac{1}{2}d_3 & & & +\frac{1}{4}d_6 & = & \gamma_{(0,1/2)} \\
d_1 & & +d_3 & & & +d_6 & = & \gamma_{(0,1)} \\
d_1 & +\frac{1}{2}d_2 & +\frac{1}{2}d_3 & +\frac{1}{4}d_4 & +\frac{1}{4}d_5 & +\frac{1}{4}d_6 & = & \gamma_{(1/2,1/2)}.
\end{array}$$

Der Wert von d_1 ist aus der ersten Gleichung offensichtlich. Mit d_1 bestimmt man aus der zweiten und dritten Gleichung d_2 und d_4 sowie aus der vierten und fünften Gleichung d_3 und d_6. Durch Einsetzen all dieser Werte in die letzte Gleichung erhält man d_5. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned}
d_1 &= \gamma_{(0,0)}, \\
d_2 &= -3\gamma_{(0,0)} + 4\gamma_{(1/2,0)} - \gamma_{(1,0)}, \\
d_3 &= -3\gamma_{(0,0)} + 4\gamma_{(0,1/2)} - \gamma_{(0,1)}, \\
d_4 &= 2\gamma_{(0,0)} - 4\gamma_{(1/2,0)} + 2\gamma_{(1,0)}, \\
d_5 &= 4\left(\gamma_{(0,0)} + \gamma_{(1/2,1/2)} - \gamma_{(1/2,0)} - \gamma_{(0,1/2)}\right), \\
d_6 &= 2\gamma_{(0,0)} - 4\gamma_{(0,1/2)} + 2\gamma_{(0,1)}.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Die Elemente von $\mathcal{N}_\xi$ und $\mathcal{N}_\eta$ sind nach (3.8) lineaer in ξ und η. Bei den zu bildenden Produkten $\mathcal{N}_\xi \mathcal{N}_\xi^T$ usw. erhält man quadratische Polynome der Gestalt

$$a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2.$$

Mit dem Ansatz (3.10) für γ sind also Polynome 4.Grades über T_0 zu integrieren. Es ist

$$
\begin{aligned}
\int_{T_0} d\xi d\eta &= \frac{1}{2}, \\
\int_{T_0} \xi d\xi d\eta &= \int_{T_0} \eta d\xi d\eta \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\eta)^2 d\eta = \frac{1}{6}, \\
\int_{T_0} \xi^2 d\xi d\eta &= \int_{T_0} \eta^2 d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi^2 d\xi d\eta = \frac{1}{3} \int_0^1 (1-\eta)^3 d\eta = \frac{1}{12}, \\
\int_{T_0} \xi\eta d\xi d\eta &= \int_0^1 \eta \int_0^{1-\eta} \xi d\xi d\eta = \frac{1}{2} \int_0^1 \eta(1-\eta)^2 d\eta = \frac{1}{24}, \\
\int_{T_0} \xi^3 d\xi d\eta &= \int_{T_0} \eta^3 d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi^3 d\xi d\eta = \frac{1}{4} \int_0^1 (1-\eta)^4 d\eta = \frac{1}{20}, \\
\int_{T_0} \eta\xi^2 d\xi d\eta &= \int_{T_0} \eta^2 \xi d\xi d\eta = \int_0^1 \eta \int_0^{1-\eta} \xi^2 d\xi d\eta = \frac{1}{3} \int_0^1 \eta(1-\eta)^3 d\eta = \frac{1}{60}, \\
\int_{T_0} \xi^4 d\xi d\eta &= \int_{T_0} \eta^4 d\xi d\eta = \int_0^1 \int_0^{1-\eta} \xi^4 d\xi d\eta = \frac{1}{5} \int_0^1 (1-\eta)^5 d\eta = \frac{1}{30}, \\
\int_{T_0} \eta\xi^3 d\xi d\eta &= \int_{T_0} \eta^3 \xi d\xi d\eta = \int_0^1 \eta \int_0^{1-\eta} \xi^3 d\xi d\eta = \frac{1}{4} \int_0^1 \eta(1-\eta)^4 d\eta = \frac{1}{120}, \\
\int_{T_0} \eta^2\xi^2 d\xi d\eta &= \int_0^1 \eta^2 \int_0^{1-\eta} \xi^2 d\xi d\eta = \frac{1}{3} \int_0^1 \eta^2(1-\eta)^3 d\eta = \frac{1}{180}.
\end{aligned}
$$

Damit gilt

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_0} (d_1 + d_2\xi + d_3\eta + d_4\xi^2 + d_5\xi\eta + d_6\eta^2)(a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\xi\eta + a_6\eta^2) d\xi d\eta \\
= \;& a_1 d_1 \int_{T_0} d\xi d\eta + (a_1 d_2 + a_2 d_1) \int_{T_0} \xi d\xi d\eta + (a_1 d_3 + a_3 d_1) \int_{T_0} \eta d\xi d\eta \\
& + (a_1 d_4 + a_2 d_2 + a_4 d_1) \int_{T_0} \xi^2 d\xi d\eta + (a_1 d_5 + a_2 d_3 + a_3 d_2 + a_5 d_1) \int_{T_0} \xi\eta d\xi d\eta \\
& + (a_1 d_6 + a_3 d_3 + a_6 d_1) \int_{T_0} \eta^2 d\xi d\eta + (a_2 d_4 + a_4 d_2) \int_{T_0} \xi^3 d\xi d\eta \\
& + (a_2 d_5 + a_3 d_4 + a_4 d_3 + a_5 d_2) \int_{T_0} \xi^2 \eta d\xi d\eta \\
& + (a_2 d_6 + a_3 d_5 + a_5 d_3 + a_6 d_2) \int_{T_0} \xi\eta^2 d\xi d\eta + (a_3 d_6 + a_6 d_3) \int_{T_0} \eta^3 d\xi d\eta \\
& + a_4 d_4 \int_{T_0} \xi^4 d\xi d\eta + (a_4 d_5 + a_5 d_4) \int_{T_0} \xi^3 \eta d\xi d\eta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+(a_4d_6+a_5d_5+a_6d_4)\int_{T_0}\xi^2\eta^2 d\xi d\eta+(a_5d_6+a_6d_5)\int_{T_0}\xi\eta^3 d\xi d\eta\\
&+a_6d_6\int_{T_0}\eta^4 d\xi d\eta\\
=\;&\frac{1}{2}a_1d_1+\frac{1}{6}(a_1d_2+a_2d_1)+\frac{1}{6}(a_1d_3+a_3d_1)+\frac{1}{12}(a_1d_4+a_2d_2+a_4d_1)\\
&+\frac{1}{24}(a_1d_5+a_2d_3+a_3d_2+a_5d_1)+\frac{1}{12}(a_1d_6+a_3d_3+a_6d_1)+\frac{1}{20}(a_2d_4+a_4d_2)\\
&+\frac{1}{60}(a_2d_5+a_3d_4+a_4d_3+a_5d_2)+\frac{1}{60}(a_2d_6+a_3d_5+a_5d_3+a_6d_2)\\
&+\frac{1}{20}(a_3d_6+a_6d_3)+\frac{1}{30}a_4d_4+\frac{1}{120}(a_4d_5+a_5d_4)\\
&+\frac{1}{180}(a_4d_6+a_5d_5+a_6d_4)+\frac{1}{120}(a_5d_6+a_6d_5)+\frac{1}{130}a_6d_6
\end{aligned}
$$

Durch Ersetzung von $d_1,\ldots,d_6$ durch (3.11) erhält man

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_0}(d_1+d_2\xi+d_3\eta+d_4\xi^2+d_5\xi\eta+d_6\eta^2)(a_1+a_2\xi+a_3\eta+a_4\xi^2+a_5\xi\eta+a_6\eta^2)d\xi d\eta\\
&=\frac{1}{360}\big[(-3a_2-3a_3-2a_4-a_5-2a_6)\gamma_{(0,0)}+(6a_2-3a_3+6a_4-2a_6)\gamma_{(1,0)}\\
&\quad+(-3a_2+6a_3-2a_4+6a_6)\gamma_{(0,1)}\\
&\quad+(60a_1+24a_2+12a_3+12a_4+4a_5+4a_6)\gamma_{(1/2,0)}\\
&\quad+(60a_1+12a_2+24a_3+4a_4+4a_5+12a_6)\gamma_{(0,1/2)}\\
&\quad+(60a_1+24a_2+24a_3+12a_4+8a_5+12a_6)\gamma_{(1/2,1/2)}\big] \qquad (3.12)\\
&=\frac{1}{360}\big[w_1\gamma_{(0,0)}+w_2\gamma_{(1,0)}+w_3\gamma_{(0,1)}+w_4\gamma_{(1/2,0)}+w_5\gamma_{(1/2,1/2)}+w_6\gamma_{(0,1/2)}\big]
\end{aligned}
$$

Als nächstes wird für alle Elemente der symmetrischen Matrizen S_1, S_2 und S_3 der Vektor $(a_1,\ldots,a_6)$ berechnet, d.h. man erhält die Produkte $\mathcal{N}_\xi\mathcal{N}_\xi^{\mathcal{T}}$, $\mathcal{N}_\xi\mathcal{N}_\eta^{\mathcal{T}}+\mathcal{N}_\eta\mathcal{N}_\xi^{\mathcal{T}}$ und $\mathcal{N}_\eta\mathcal{N}_\eta^{\mathcal{T}}$, siehe folgende Seiten. Im Anschluß an diese Produkte sind die Wichtungen $(w_1,\ldots,w_6)$ für die Elemente von S_1, S_2 und S_3 dargestellt, die man bei bekanntem $(a_1,\ldots,a_6)$ für jedes Element aus (3.12) berechnen kann.

Für ein gegebenes Dreieck hat man die Elemente der Matrizen S_1, S_2 und S_3 zu berechnen. Mit (3.9) berechnet sich damit die Elementmatrix S_e. Seien die Knoten des Dreiecks T mit den Knotennummmern $k_1, \ldots, k_6$ versehen, dann wird das (i,j)-te Element von S_e zum (k_i, k_j)-ten Element von A addiert.

Wenn man das oben beschriebene Verfahren für alle Dreiecke durchgeführt hat, erhält man die Matrix A. Diese Matrix wird auch Gesamtsteifigkeitsmatrix genannt.

3.3 Die Diskretisierung des Neumannoperators

In der Extremalaufgabe (3.2) hat der Neumannoperator die Gestalt

$$\int_{\partial\Omega} \gamma(x,y)\frac{\partial u}{\partial \nu} u dS = \int_{\partial\Omega} g(x,y) u dS.$$

Die grundlegende Herangehensweise ist genauso wie bei der Diskretisierung des elliptischen Operators $\nabla \cdot \gamma \nabla$. Eine Diskretisierung des Randes in geradlinige Elemente sei gegeben. Seien $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ die Eckpunkte eines beliebigen Randelementes. Auf diesem sei eine integrierbare Funktion $f(x,y)$ gegeben. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} f(x,y) dS &= \int_0^1 f(x_{21}\xi + x_1, y_{21}\xi + y_1)\sqrt{x_{21}^2 + y_{21}^2} d\xi \\ &= |P_1P_2| \int_0^1 f(x_{21}\xi + x_1, y_{21}\xi + y_1) d\xi,\end{aligned}$$

wobei die Parameterdarstellung der Strecke $\overline{P_1P_2}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} \\ y_{21} \end{pmatrix} \xi \quad , \xi \in [0,1],$$

benutzt wurde. $|P_1P_2|$ ist die Länge der Strecke $\overline{P_1P_2}$, $x_{21} = x_2 - x_1$, $y_{21} = y_2 - y_1$. Im folgenden wird für $f(\xi = 0) = f(0)$ usw. geschrieben. Somit sind nur Integrale auf der Einheitsstrecke $[0,1]$ der $\xi-$Achse zu berechnen.

Die Funktion u wird wieder quadratisch angesetzt, d.h.

$$u(\xi) = c_1 + c_2\xi + c_3\xi^2.$$

Wir nehmen zunächst an, daß die Werte von $g(\xi)$ in den Punkten $\xi = 0, \xi = 1/2$ und $\xi = 1$ unabhängig voneinander gegeben sind. Somit kann man $g(\xi)$ ebenfalls quadratisch ansetzen

$$g(\xi) = d_1 + d_2\xi + d_3\xi^2.$$

Man erhält daraus

$$\begin{aligned}
d_1 &= g(0) \\
d_2 &= -3g(0) + 4g(1/2) - g(1) \\
d_3 &= 2g(0) - 4g(1/2) + 2g(1).
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
c_1 &= u(0) \\
c_2 &= -3u(0) + 4u(1/2) - u(1) \\
c_3 &= 2u(0) - 4u(1/2) + 2u(1).
\end{aligned}$$

Mit diesen Beziehungen berechnet sich die Diskretisierung des Neumannoperators wie folgt :

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 g(\xi)u(\xi)d\xi \\
&= d_1c_1 + \frac{d_1c_2 + d_2c_1}{2} + \frac{d_1c_3 + d_2c_2 + d_3c_1}{3} + \frac{d_2c_3 + d_3c_2}{4} + \frac{d_3c_3}{5} \\
&= u(0)\left(\frac{1}{6}d_1 - \frac{1}{60}d_3\right) + u(1/2)\left(\frac{2}{3}d_1 + \frac{1}{3}d_2 + \frac{1}{5}d_3\right) + u(1)\left(\frac{1}{6}d_1 + \frac{1}{6}d_2 + \frac{3}{20}d_3\right) \\
&= u(0)\left(\frac{2}{15}g(0) + \frac{1}{15}g(1/2) - \frac{1}{30}g(1)\right) + u(1/2)\left(\frac{1}{15}g(0) + \frac{8}{15}g(1/2) + \frac{1}{15}g(1)\right) + \\
&\quad u(1)\left(-\frac{1}{30}g(0) + \frac{1}{15}g(1/2) + \frac{2}{15}g(1)\right).
\end{aligned}$$

Mit diesem Resultat kann man die Elemente des diskretisierten Neumannoperators berechnen, die den Vektor d in (3.5) bilden. Ist P_i der Mittelpunkt eines Randelementes, so ergibt sich

$$d_i = \frac{l}{15}\left(g(P_{i-1}) + 8g(P_i) + g(P_{i+1})\right),$$

wobei P_{i-1}, P_{i+1} die benachbarten Knoten von P_i auf dem Rand sind und l die Länge des Randelementes ist. Ist P_i Eckpunkt eines Randelementes, so wird d_i durch die zwei benachbarten Randelemente bestimmt. Sei l_1 die Länge des einen Randelementes, l_2 die des anderen. Dann gilt

$$d_i = \frac{1}{30}\left(-l_1 g(P_{i-2}) + 2l_1 g(P_{i-1}) + 4(l_1 + l_2)g(P_i) + 2l_2 g(P_{i+1}) - l_2 g(P_{i+2})\right).$$

Bei unseren Testrechnungen sind alle Randelementen gleichlang, also $l_1 = l_2 = l$. Damit erhält man

$$d_i = \frac{l}{30}\left(-g(P_{i-2}) + 2g(P_{i-1}) + 8g(P_i) + 2g(P_{i+1}) - g(P_{i+2})\right).$$

Es gilt

$$d = Dg,$$

wobei D in diesem Fall eine schwach besetzte Matrix mit drei Nichtnulleinträgen pro Zeile ist.

Ist $g(\xi)$ nur linear, also

$$g(1/2) = \frac{g(0) + g(1)}{2},$$

so vereinfacht sich die Diskretisierung des Neumannoperators zu

$$\int_0^1 g(\xi)u(\xi)d\xi = u(0)\left(\frac{1}{6}g(0)\right) + u(1/2)\left(\frac{2}{3}g(1/2)\right) + u(1)\left(\frac{1}{6}g(1)\right).$$

Das ist die bekannte Simpsonregel, die Polynome bis zum dritten Grad genau integriert. Für den Vektor d erhält man

$$d_i = \frac{2l}{3}g(P_i),$$

falls P_i Mittelpunkt eines Randelementes ist und

$$d_i = \frac{1}{6}(l_1 + l_2)g(P_i),$$

falls P_i Eckpunkt ist. In Matrizenschreibweise ist das

$$d = Dg = diag(d_{11}, \ldots, d_{KK})g,$$

wobei K die Anzahl der Randknoten ist und $d_{11}, \ldots, d_{KK}$ nur von der Diskretisierung des Randes abhängt. Sind alle Randelemente gleichlang, so gilt $d_{ii} \in \{2l/3, l/3\}$, $i = 1(1)K$. In diesem Fall läßt sich g bei Kenntnis von d besonders einfach berechnen. Bei Kenntnis der Gesamtsteifigkeitsmatrix A und von u läßt sich wiederum d einfach bestimmen.

3.4 Neumann- und Dirichletproblem

Die Knoten werden so durchnumeriert, daß die inneren Knoten die niedrigen Nummern besitzen und die äußeren die hohen. Dann liefert die FEM folgende Größen :

$$A = \begin{pmatrix} A_{inn} & A_{inra} \\ A_{inra}^T & A_{rand} \end{pmatrix}$$

und

$$d = \begin{pmatrix} 0 \\ Dg \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A ist symmetrisch, schwach besetzt und hat den Rangabfall 1. Der Nullraum wird von $(1, \ldots, 1)^T$ aufgespannt. Die Länge dieses Vektors ist gleich der Anzahl der Knoten in der Diskretisierung. Die Matrix A_{inn} dagegen ist positiv definit. Der Block A_{inn} beschreibt die Beziehungen der inneren Knoten untereinander, der Block A_{inra} die Beziehungen der inneren Knoten mit den Randknoten und der Block A_{rand} die Beziehungen der Randknoten untereinander.

Bei der Behandlung des Neumannproblems hat man das System

$$\begin{pmatrix} A_{inn} & A_{inra} \\ A_{inra}^T & A_{rand} \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ Dg \end{pmatrix}$$

zu lösen. Da A den Rangabfall 1 hat, ist dies erst eindeutig möglich, wenn man eine Normierung vorgibt, etwa eine Komponente des Vektors u.

Beim Dirichletproblem sind die Werte von u auf dem Rand, u_{rand}, gegeben. Es dürfen keine Neumanndaten vorgegeben sein, da sonst das Problem überbestimmt ist.

Die Gleichungen, die die Neumanndaten beschreiben, werden gestrichen, und man erhält

$$(A_{inn}, A_{inra}) \begin{pmatrix} u_{inn} \\ u_{rand} \end{pmatrix} = 0.$$

Die Größen u_{rand} werden eingesetzt, so daß man letzten Endes das Gleichungssystem

$$A_{inn} u_{inn} = -A_{inra} u_{rand}$$

zu lösen hat.

Kapitel 4

Anwendung des Gauß-Newton Verfahren

4.1 Problemformulierung mit Ausgabefehlerkriterium

Man hat mehrere Möglichkeiten, das inverse Leitfähigkeitsproblem als Ausgabefehlerproblem gemäß Kapitel 2.2 zu formulieren. Bisherige Herangehensweisen gleichen entweder die Dirichletdaten ab und lösen als Nebenbedingungen Neumannprobleme oder sie gleichen die Neumanndaten ab und lösen Dirichletprobleme.

Gegeben seien Paare $(\bar{f}_i, \bar{g}_i), i = 1(1)S$, von Meßwerten von Dirichlet- und Neumanndaten. S ist die Anzahl der Messungen. $\bar{f}_i, \bar{g}_i, i = 1(1)S$, sind auf $\partial\Omega$ definierte Funktionen bzw. falls man nur diskrete Werte auf dem Rand zur Verfügung hat, M-dimensionale Vektoren, wobei M die Anzahl der Meßelektroden ist. In diesem Falle ist die Anzahl der linear unabhängigen Messungen durch $S = M - 1$ begrenzt. Den einen Freiheitsgrad verliert man dadurch, daß man zur Spannungsmessung eine Referenzelektrode benötigt, an welcher die Spannung fest gewählt ist. Alle $\bar{g}_i$ mögen die Kompatibilitätsbedingung (1.9) erfüllen, d.h. daß in den Körper genau so viel Strom herausfließt, wie hineinfließt.

Das Ausgabefehlerproblem zur Abgleichung der Dirichletdaten hat die Gestalt

$$\min_{(\gamma,u_i)\in P\times(H^1(\Omega))^S} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S} ||f_i - \bar{f}_i||_*^2 \tag{4.1}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\nabla\cdot\gamma\nabla u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad i = 1(1)S, \tag{4.2}$$

$$\gamma\frac{\partial u_i}{\partial\nu} = \bar{g}_i \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad i = 1(1)S. \tag{4.3}$$

Das Ausgabefehlerproblem zur Abgleichung der Neumanndaten hat die Gestalt

$$\min_{(\gamma,u_i)\in P\times(H^1(\Omega))^S} \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S} ||g_i - \bar{g}_i||_+^2 \tag{4.4}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\nabla\cdot\gamma\nabla u_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad i = 1(1)S, \tag{4.5}$$

$$u_i = \bar{f}_i \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad i = 1(1)S. \tag{4.6}$$

In dieser Arbeit wollen wir das Problem auf eine andere Art und Weise formulieren :

$$\min_{(\gamma,u_i)\in P\times(H^1(\Omega))^S} \left\{ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S} ||f_i - \bar{f}_i||_*^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{S} ||g_i - \bar{g}_i||_+^2 \right\} \tag{4.7}$$

mit den Nebenbedingungen

$$\nabla\cdot\gamma\nabla u_i = 0, \quad i = 1(1)S. \tag{4.8}$$

Als Verallgemeinerung ist eine unterschiedliche Wichtung der beiden Summanden vorstellbar.

Bei diesen Formulierungen ist P eine geeignet zu wählende Menge, in der die Leitfähigkeit γ enthalten ist, und $||\cdot||_*$ sowie $||\cdot||_+$ sind geeignet zu wählende Normen.

4.2 Anwendung des ungedämpften Gauß-Newton Verfahrens

Ausgangspunkt ist die folgende diskrete Problemformulierung :

$$(4.9) \qquad \min_{\Gamma, U_i, G_i, i=1(1)S} \left\{ \sum_{i=1}^{S} ||U_{i,rand} - \overline{U}_{i,rand}||^2 + \sum_{i=1}^{S} ||G_i - \overline{G}_i||^2 \right\}$$

mit den Nebenbedingungen

$$(4.10) \qquad A(\Gamma)U_i - D_i = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad i = 1(1)S.$$

Dabei ist

$$D_i = \begin{pmatrix} 0 \\ DG_i \end{pmatrix}$$

mit der Matrix D aus Abschnitt 3.3.

Wir betrachten das diskretisierte Problem, d.h. die Größen in (4.9) und (4.10) sind nun Vektoren bzw. Matrizen und werden mit Großbuchstaben bezeichnet, insbesondere ist Γ die Diskretisierung von γ. Wir verwenden die l_2-Norm. Die Dirichletdaten werden von nun ab mit $U_{i,rand}$ anstelle von F_i bezeichnet. Wir setzen weiterhin Ω als zusammenhängendes Gebiet voraus. Die Diskretisierungen der Funktionen u_i, $i = 1(1)S$ in Ω und der Funktion γ müssen nicht gleich sein. Bei Testrechnungen wurde z.B. γ gröber als die u_i diskretisiert.

Die Idee des Gauß-Newton Verfahrens besteht darin, sowohl die Ausdrücke in den zu minimierenden Termen als auch die Nebenbedingungen zu linearisieren. Ausgehend von Näherungen werden diese linearisierten Probleme gelöst, in der Hoffnung, daß diese Lösung eine bessere Näherung ist. Dieses Verfahren wiederholt man und konstruiert eine Folge $(\Gamma^j, U_1^j, \ldots, U_S^j)$, $j = 1, 2, \ldots$, die gegen die Lösung des Ausgangsproblems (4.9) konvergiert.

Wir betrachten die Variablengruppen Γ, $U_{i,inn}$, $U_{i,rand}$, G_i, $i = 1(1)S$, die als unabhängig angesehen werden und die durch die Nebenbedingungen miteinander verbunden sind. Es wird nun eine Korrektur $\Delta\Gamma$, $\Delta U_{i,inn}$, $\Delta U_{i,rand}$, ΔG_i, $i = 1(1)S$, so gesucht, daß die linearisierten Fehlergleichungen minimiert werden und linearisierte Nebenbedingungen erfüllt sind. D.h. das linearisierte Fehlerfunktional hat die Gestalt

$$\min_{\Delta\Gamma,\Delta U_i,\Delta G_i,i=1(1)S} \sum_{i=1}^{S} ||U_{i,rand} - \overline{U}_{i,rand} + \Delta U_{i,rand}||^2 + ||G_i - \overline{G}_i + \Delta G_i||^2. \tag{4.11}$$

Nach der Diskretisierung der Nebenbedingungen mit Hilfe der FEM erhält man

$$\begin{aligned} F(\Gamma, U_{i,inn}, U_{i,rand}, G_i) &= AU_i - d_i \\ &= \begin{pmatrix} A_{inn} & A_{inra} \\ A_{inra}^T & A_{rand} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i,inn} \\ U_{i,rand} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ DG_i \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Die korrigierten Größen sollen die linearisierten Nebenbedingungen erfüllen, d.h.

$$\begin{aligned} & F(\Gamma + \Delta\Gamma, U_{i,inn} + \Delta U_{i,inn}, U_{i,rand} + \Delta U_{i,rand}, G_i + \Delta G_i) \\ \approx\ & F(\Gamma, U_{i,inn}, U_{i,rand}, G_i) + \frac{\partial F}{\partial \Gamma}\Delta\Gamma + \frac{\partial F}{\partial U_{i,inn}}\Delta U_{i,inn} + \frac{\partial F}{\partial U_{i,rand}}\Delta U_{i,rand} + \\ & \frac{\partial F}{\partial G_i}\Delta G_i \\ =\ & 0. \end{aligned}$$

Da die Variablengruppen als linear unabhängig angesehen werden und die Gesamtsteifigkeitsmatrix A nur von Γ abhängt, ist dies in Matrizenschreibweise

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_{inn} & A_{inra} \\ A_{inra}^T & A_{rand} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{i,inn} \\ U_{i,rand} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ DG_i \end{pmatrix} + \\ & \frac{\partial A}{\partial \Gamma} \begin{pmatrix} U_{i,inn} \\ U_{i,rand} \end{pmatrix} \Delta\Gamma + \begin{pmatrix} A_{inn} \\ A_{inra}^T \end{pmatrix} \Delta U_{i,inn} + \begin{pmatrix} A_{inra} \\ A_{rand}^T \end{pmatrix} \Delta U_{i,rand} + \\ & \begin{pmatrix} 0 \\ -D \end{pmatrix} \Delta G_i \end{aligned} \tag{4.13}$$

mit

$$\frac{\partial A}{\partial \Gamma} = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{inn}}{\partial \Gamma} & \frac{\partial A_{inra}}{\partial \Gamma} \\ \frac{\partial A_{inra}^T}{\partial \Gamma} & \frac{\partial A_{rand}}{\partial \Gamma} \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A_{inn} ist regulär. Somit kann man den oberen Teil dieser Gleichungen nach $\Delta U_{i,inn}$ aufgelösen :

$$\begin{aligned} \Delta U_{i,inn} &= -A_{inn}^{-1}\left(A_{inn}U_{i,inn} + A_{inra}U_{i,rand} + A_{inra}\Delta U_{i,rand} + \right. \\ &\qquad \left. \frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma}U_i\Delta\Gamma\right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Da D regulär ist, können die unteren Gleichungen nach ΔG_i aufgelöst werden und $\Delta U_{i,inn}$ durch (4.14) ersetzt werden :

$$\begin{aligned} \Delta G_i &= D^{-1}\left(A_{inra}^T U_{i,inn} + A_{rand}U_{i,rand} - DG_i + A_{inra}^T\Delta U_{i,inn} + A_{rand}\Delta U_{i,rand} + \right. \\ &\qquad \left. \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma}U_i\Delta\Gamma\right) \\ &= D^{-1}\left[(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1}A_{inra} + A_{rand})\Delta U_{i,rand}\right. \\ &\quad + \left(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1}\frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma}U_i + \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma}U_i\right)\Delta\Gamma \\ &\quad \left. + A_{rand}U_{i,rand} - A_{inra}^T A_{inn}^{-1}A_{inra}U_{i,rand}\right] - G_i. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Dies wird in die zu minimierenden Gleichungen (4.11) eingesetzt und man erhält

$$\begin{aligned} \min_{\Delta U_{1,rand},\ldots\Delta U_{S,rand},\Delta\Gamma} & \sum_{i=1}^{S} ||U_{i,rand} - \overline{U}_{i,rand} + \Delta U_{i,rand}||^2 \\ & + ||D^{-1}\left[(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1}A_{inra} + A_{rand})\Delta U_{i,rand}\right. \\ & + \left(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1}\frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma}U_i + \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma}U_i\right)\Delta\Gamma \\ & \left. + (-A_{inra}^T A_{inn}^{-1}A_{inra} + A_{rand})U_{i,rand}\right] - \overline{G}_i||^2. \end{aligned}$$

Zur Behandlung dieser Aufgabe müssen die Matrizen

$$\frac{\partial A}{\partial\Gamma}U_i \quad , i = 1(1)S,$$

berechnet werden. Es interessiert die Änderung von A, falls Γ in einem Knoten, etwa im Knoten j, um den Wert $\Delta\Gamma_j$ gestört wird. Wir führen den Vektor

$$H_j = \begin{cases} 1, & \text{im Knoten } j \\ 0, & \text{in allen anderen Knoten der Diskretisierung von } \Gamma \end{cases}$$

ein. Dann berechnet sich die j-te Spalte von $(\partial(A)/\partial\Gamma)U_i$ durch

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\partial A}{\partial \Gamma}U_i\right)_j &= \lim_{\Delta\Gamma_j\to 0}\frac{A(\Gamma+\Delta\Gamma_j H_j)-A(\Gamma)}{\Delta\Gamma_j}U_i \\
&= \lim_{\Delta\Gamma_j\to 0}\frac{A(\Gamma)+A(\Delta\Gamma_j H_j)-A(\Gamma)}{\Delta\Gamma_j}U_i \\
&= \lim_{\Delta\Gamma_j\to 0}\frac{\Delta\Gamma_j A(H_j)}{\Delta\Gamma_j}U_i \\
&= A(H_j)U_i.
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

$A(\Gamma)$ ist als endlichdimensionale Approximation des linearen Operators $L_\gamma = \nabla\cdot\gamma\nabla$ ebenfalls linear. Die Matrizen $A(H_j)$ sind konstante Matrizen, deren von Null verschiedenen Werte am Anfang des Programms berechnet werden. Die Matrizen $A(H_j)$ sind symmetrisch und ihre Zeilen- und Spaltensummen verschwinden. Die Anzahl der Zeilen bzw. Spalten, die Nichtnullelemente besitzen, ist unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung. Zur Umsetzung der Berechnung von $A(H_j)$ vgl. die Beschreibung der Subroutine SEIBERE.FOR. Bei der Beschreibung dieser Subroutine wird ersichtlich, daß die Anzahl der Nichtnullspalten bzw. -zeilen in der vorliegenden Implementation höchstens 25 ist. Somit ist auch der Rang der $A(H_j)$ unabhängig von der Diskretisierung nach oben beschränkt.

Die Matrix A_{inn} wird mit Cholesky-Zerlegung zu

$$A_{inn} = R^T R$$

faktorisiert. Die obere Dreiecksmatrix R ist nicht mehr schwach besetzt, allerdings treten Nichtnullelemente höchstens an den Stellen auf, die innerhalb der Umhüllenden von A_{inn} liegen, vgl. etwa [KS88], S.226. Mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung lassen sich folgende Größen berechnen :

$$
\begin{aligned}
X &= R^{-T}A_{inra} \\
Y &= A_{inn}^{-1}A_{inra} = R^{-1}X \\
X1 &= A_{inra}^{T}A_{inn}^{-1}A_{inra} = X^T X
\end{aligned}
\tag{4.17}
$$

$$
\begin{aligned}
X1 &= D^{-1}(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1} A_{inra} + A_{rand}) = D^{-1}(-X1 + A_{rand}) \\
X3_i &= D^{-1}(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1} A_{inra} + A_{rand}) U_{i,rand} - \overline{G}_i = X1 U_{i,rand} - \overline{G}_i \\
X2_i &= D^{-1}\left(-A_{inra}^T A_{inn}^{-1} \frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma} U_i + \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma} U_i\right) \\
& D^{-1}\left(-Y^T \frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma} U_i + \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma} U_i\right).
\end{aligned}
$$

Mit diesen Bezeichnungen erhält man das linearisierte und reduzierte Minimierungsproblem

$$
\min_{\Delta U_{1,rand},\dots\Delta U_{S,rand},\Delta\Gamma} \left\{ \sum_{i=1}^{S} ||U_{i,rand} - \overline{U}_{i,rand} + \Delta U_{i,rand}||^2 + \|X1 \Delta U_{i,rand} \right.
$$
$$
\left. + X2_i \Delta\Gamma + X3_i\|^2 \right\} \tag{4.18}
$$

oder in Matrizenschreibweise

$$
\min_{\mathcal{H}} \left\| \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ I \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} X2_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \begin{pmatrix} X1 \\ I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X2_S \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_{1,rand} \\ \vdots \\ \Delta U_{S,rand} \\ \Delta\Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X3_1 \\ U_{1,rand} - \overline{U}_{1,rand} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} X3_S \\ U_{S,rand} - \overline{U}_{S,rand} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \right\|^2
$$

mit $\mathcal{H} = \{\Delta U_{1,rand}, \dots \Delta U_{S,rand}, \Delta\Gamma\}$. Bezeichnen wir die Matrix dieses Quadratmittelproblems mit C. Um eine eindeutig bestimmte Lösung des obigen Quadratmittelproblems zu erhalten ist eine notwendige Bedingung, daß mindestens soviel Gleichungen wie Unbekannte vorliegen. Sei S die Anzahl der Datensätze, K die Anzahl der Randknoten bezüglich der Diskretisierung der Spannungen u_i und M die Anzahl der Knoten bezüglich der Diskretisierung von γ. Dann haben $X1$ und die Einheitsmatrizen die Dimension $K \times K$, die Matrizen $X2_i$, $i = 1(1)S$, jeweils die Dimension $K \times M$. Die Gesamtmatrix hat somit die Dimension $2SK \times (SK + M)$. Aus der Forderung das mindestens soviel Gleichungen wie Unbekannte vorhanden sein müssen, erhält man damit als Bedingung $SK \geq M$.

Eine hinreichende Bedingung für eine eindeutig bestimmte Lösung des Quadratmittelproblems ist unter der Voraussetzung $SK \geq M$ die Spaltenregularität der Koeffizientenmatrix C. Dies wird man nicht für beliebige Werte U_i und Γ erwarten können, man kann aber wenigstens untersuchen, wie die Situation in der Lösung aussieht. Die Größen der Lösung werden mit einer Überstreichung gekennzeichnet. Hat man die Regularität von C in der Lösung, so folgt durch die stetige Abhängigkeit der Matrix C von den Eingangsdaten, daß diese Matrix in einer Umgebung der Lösung regulär ist. Daraus folgt, daß das Gauß-Newton Verfahren für die obige Aufgabenstellung lokal durchführbar ist.

Die lineare Unabhängigkeit der ersten SK Spalten ist durch die auftretenden Blöcke von Einheitsmatrizen offensichtlich. Zur linearen Unabhängigkeit der letzten M Spalten ist es notwendig, daß unter diesen Spalten keine Nullspalte ist. Wir wollen zeigen, daß man dies aber a-priori nicht gewährleisten kann.

Die letzten M Spalten haben unter Vernachlässigung der Nullzeilen die Gestalt

$$\begin{pmatrix} (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j)\overline{U}_1 \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j)\overline{U}_2 \\ \vdots \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j)\overline{U}_S \end{pmatrix} \qquad , j = 1(1)M.$$

Im Lösungspunkt sind die Nebenbedingungen (4.12) erfüllt. Durch Umstellung der oberen Gleichungen erhält man

$$\overline{U}_{i,inn} = -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma})\overline{U}_{i,rand}.$$

Damit lassen sich die letzten M Spalten der Koeffizientenmatrix in der Gestalt

$$\begin{pmatrix} (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{1,rand} \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{2,rand} \\ \vdots \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{S,rand} \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

$j = 1(1)S$, schreiben. Auf Grund der Symmetrie von $A_{inn}(\overline{\Gamma})$ ist

$$\begin{pmatrix} -A_{inn}^{-1}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} = (-A_{inra}^T(\overline{\Gamma})A_{inn}^{-1}(\overline{\Gamma}), I)^T. \tag{4.20}$$

Es gilt, daß der Rang eines Matrizenproduktes kleiner oder gleich dem niedrigsten Rang der einzelnen Faktoren ist. Die Matrizen (4.20) haben Vollrang K. Der Rang von $A(H_j)$ ist unabhängig von der Diskretisierung nach oben beschränkt. Ist K hinreichend groß, so ist der Rang von

$$(-A_{inra}^T(\overline{\Gamma})A_{inn}^{-1}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A_{inn}^{-1}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

durch den Rang von $A(H_j)$ beschränkt. Selbst für sehr grobe Diskretisierungen tritt der Fall ein, daß K größer ist als der Rang von $A(Hj)$, daß das Matrizenprodukt (4.21) also singulär ist. Über $\overline{\Gamma}$ ist a-priori nichts bekannt. Die $\overline{U}_{i,rand}$ repräsentieren Meßwerte auf dem Rand. Da die Vorgaben für die Messungen willkürlich gemacht werden können, steckt in den $\overline{U}_{i,rand}$ ebenfalls eine gewisse Willkür. Um zu gewährleisten, daß (4.18) keine Nullspalte wird, müssen also soviele linear unabhängige Randvektoren $\overline{U}_{i,rand}$ vorhanden sein, daß ihre Anzahl die Dimension des Nullraumes von (4.21) übersteigt. Diese Dimension wächst mit einer Verfeinerung der Diskretisierung. Mit einer wachsenden Anzahl von Sätzen von Randdaten wächst ebenfalls der Aufwand bei der Berechnung von $\overline{\Gamma}$, da ja jeder Datensatz irgendwie berücksichtigt werden muß. Andererseits ist die Beschaffung vieler Datensätze oft aus zeitlichen und aus Kostengründen nicht möglich.

Man sucht eine Möglichkeit, unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung und von der Anzahl der Datensätze die Regularität der Koeffizientenmatrix C in der Lösung zu sichern. Das geschieht durch das Hinzufügen eines Regularisierungstermes für Γ. Daraus resultieren zusätzliche Gleichungen. Die Struktur des Regularisierungstermes und der zugehörigen Gleichungen werden in Abschnitt 4.3 beschrieben.

Lösungsmöglichkeiten des obigen Quadratmittelproblems werden im Abschnitt 4.4 diskutiert.

Seien $\Delta U_{i,rand}, \Delta\Gamma$ berechnet worden, gelte

$$U_{i,rand}^{neu} = U_{i,rand} + \Delta U_{i,rand}$$

$$\Gamma^{neu} = \Gamma + \Delta\Gamma.$$

Aus (4.14) läßt sich $U_{i,inn}^{neu}$, $i = 1(1)S$, wie folgt bestimmen :

$$\begin{aligned} U_{i,inn}^{neu} &= U_{i,inn} + \Delta U_{i,inn} \\ &= -A_{inn}^{-1}A_{inra}(U_{i,rand} + \Delta U_{i,rand}) - A_{inn}^{-1}\frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma}U_i\Delta\Gamma \\ &= -YU_{i,rand}^{neu} - A_{inn}^{-1}\frac{\partial(A_{inn}, A_{inra})}{\partial\Gamma}U_i\Delta\Gamma. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Die Matrix Y ist in (4.17) eingeführt. Bei der Berechnung des zweiten Summanden wird zuerst $\frac{\partial(A_{inn},A_{inra})}{\partial\Gamma}U_i$ mit $\Delta\Gamma$ multipliziert. Da A_{inn} in faktorisierter Form $A_{inn} = R^TR$ vorliegt, kann man dann diesen Summanden durch die Lösung von zwei Dreieckssystemen schnell berechnen.

Aus (4.15) lassen sich G_i^{neu}, $i = 1(1)S$, bestimmen :

$$\begin{aligned} G_i^{neu} &= G_i + \Delta G_i \\ &= D^{-1}(A_{inra}^T(U_{i,inn} + \Delta U_{i,inn}) + A_{rand}(U_{i,rand} + \Delta U_{i,rand} + \\ &\quad \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma}U_i\Delta\Gamma\Big) \\ &= D^{-1}\left(A_{inra}^TU_{i,inn}^{neu} + A_{rand}U_{i,rand}^{neu} + \frac{\partial(A_{inra}^T, A_{rand})}{\partial\Gamma}U_i\Delta\Gamma\right) \end{aligned} \tag{4.23}$$

Alles in allem hat man zur Berechnung von $U_{i,inn}^{neu}$ und G_i^{neu}, $i = 1(1)S$, $2S$ Dreieckssysteme zu lösen und einige Matrix - Vektor Produkte zu bilden.

4.3 Regularisierung

Durch die Regularisierung soll (4.9) um zusätzliche Gleichungen erweitert werden. Sinn dieser Gleichungen ist es, auch dann eine eindeutige Lösung von (4.9) zu erhalten, wenn dies mit den eigentlich vorliegenden Informationen nicht möglich ist. Durch die neuen Gleichungen werden zusätzliche Bedingungen an die Lösung gestellt, die nicht problemspezifisch sind. Diese Bedingungen sollen erstens sinnvoll sein (Glattheitsforderungen), zweitens soll ihr Einfluß so stark sein, daß das Quadratmittelproblem numerisch gut gelöst werden kann und drittens soll ihr Einfluß so klein sein, daß auftretende Verfälschungen des Ergebnisses möglichst klein sind.

Eine vielfach genutzte Methode zur Regularisierung ist die Tychonov - Philipps - Regularisierung. Dabei wird zu (4.9) ein Strafterm der Gestalt

$$\beta B(\gamma)$$

addiert, wobei $\beta > 0$ und $B(\gamma)$ eine strikt konvexe, nicht negative Funktion ist. In der vorliegenden Arbeit wird eine diskrete Formulierung von

$$B(\gamma) = ||\nabla\gamma||^2$$

gewählt. Dies ist eine Glattheitsforderung an γ. Durch den Parameter β wird der Einfluß dieses Straftermes auf das Ergebnis und damit die Größe der Verfälschung gesteuert. Die diskrete Formulierung wird $\nabla\Gamma$ genannt.

Statt der Funktion γ steht nur der Vektor Γ zur Verfügung. Wie kann man nun den Gradienten einer diskreten Größe erklären? Jeder Knoten der Diskretisierung von γ ist durch die Seiten der finiten Elemente mit anderen Knoten verbunden. Diese Knoten nennen wir benachbart. Wir denken uns die Funktionswerte zweier benachbarter Knoten i und j linear verbunden und definieren als eine Komponente des Vektors $\nabla\Gamma$ die Größe $(\Gamma_i - \Gamma_j)/l_{ij}$, wobei l_{ij} die Länge der Seite von i nach j ist. In (4.18) erhält man den zusätzlichen Term

$$\beta||\nabla\Gamma + \nabla(\Delta\Gamma)||^2 = \beta||(\Gamma_i - \Gamma_j)/l_{ij} + (\Delta\Gamma_i - \Delta\Gamma_j)/l_{ij}||^2,$$

wobei alle Paare benachbarter Knoten i und j zu berücksichtigen sind. Dies sind zusätzliche Gleichungen im Quadratmittelproblem, $\beta(\Gamma_i - \Gamma_j)/l_{ij}$ sind die konstanten

Vektoren, $\beta(\Delta\Gamma_i - \Delta\Gamma_j)/l_{ij}$, eine Zeile der Matrix, die außer den Elementen β/l_{ij} und $-\beta/l_{ij}$ nur Nullen hat. Die Nichtnullelemente stehen an den entsprechenden Stellen für $\Delta\Gamma_i$ und $\Delta\Gamma_j$. Insbesondere ist die Summe jeder Zeile gleich Null. Nennen wir die so gebildete Matrix B und den Konstantenvektor b, so erhält man das System

$$\min_{\mathcal{H}} \left\| \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X1 \\ I \end{pmatrix} & & & \begin{pmatrix} X2_1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \begin{pmatrix} X1 \\ I \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} X2_S \\ 0 \end{pmatrix} \\ & & & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_{1,rand} \\ \vdots \\ \Delta U_{S,rand} \\ \Delta\Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} X3_1 \\ U_{1,rand} - \overline{U}_{1,rand} \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \begin{pmatrix} X3_S \\ U_{S,rand} - \overline{U}_{S,rand} \end{pmatrix} \\ b \end{pmatrix} \right\|^2 \tag{4.24}$$

mit $\mathcal{H} = \{\Delta U_{1,rand}, \ldots \Delta U_{S,rand}, \Delta\Gamma\}$. Bezeichnen wir die Koeffizientenmatrix dieses Quadratmittelproblems wiederum mit C, sei 1_m der m-dimensionalen Vektor $(1, \ldots, 1)^T$ und 0_m der m-dimensionale Vektor $(0, \ldots, 0)^T$.

Satz 4.1 *Unter den Voraussetzungen, daß $\beta > 0$ gewählt ist und daß mindestens ein Vektor $\overline{U}_{i,rand}$ nicht ein Vielfaches von 1_K ist, ist C in der Lösung spaltenregulär.*

Beweis. Seien wie vorhergegangenen Abschnitt K die Anzahl der Randknoten und L die Gesamtanzahl der Knoten bezüglich der Diskretisierung von u_i, M die Anzahl der Knoten bezüglich der Diskretisierung von γ, R die Anzahl der durch die Regularisierung hinzukommenden Gleichungen und S die Anzahl der Datensätze. Somit haben die Blöcke von Einheitsmatrizen und die Matrix X1 die Dimension $K \times K$, die Blöcke $X2_i$ die Dimension $K \times M$ und B die Dimension $R \times M$.

Wegen der Blöcke von Einheitsmatrizen ist die lineare Unabhängigkeit der ersten SK Spalten offensichtlich.

Die j-te Spalte der rechten M Spalten von C hat (unter Vernachlässigung der

Nullblöcke) die Gestalt

$$\begin{pmatrix} (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{1,rand} \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{2,rand} \\ \vdots \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{S,rand} \\ b_j \end{pmatrix},$$

vgl. Herleitung von (4.19). Der Vektor b_j hat außer Nullen nur die Elemente $\pm\beta/l_{j_1 j_2}$. Die Anzahl dieser Nichtnulleinträge in der Spalte j ist gleich der Anzahl der Nachbarknoten des Knotens j bzgl. der Diskretisierung von Γ. Da j Knoten eines zweidimensionalen finiten Elementes ist, ist die Anzahl der Nachbarknoten und demzufolge die Anzahl der Nichtnulleinträge in b_j mindestens 2. (In Abb.5.8 sind die Nachbarknoten des Knotens 13 die Knoten mit den Nummern 3,11,15,23.) Wir wollen die lineare Unabhängigkeit der letzeten M Spalten von C beweisen. Sind diese linear abhängig, so existiert ein M-dimensionaler Vektor $(a_1, \ldots, a_M)^T$, der nicht der Nullvektor ist, mit

(4.25)

$$\sum_{j=1}^{M} a_j \begin{pmatrix} (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{1,rand} \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{2,rand} \\ \vdots \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{S,rand} \\ b_j \end{pmatrix} = 0_{SK+R},$$

Sei $a_{k_1} \neq 0$. Dann gibt es eine Zeile l_1 mit $b_{l_1 k_1} = \pm\beta/l_{j_1 j_2}$. In dieser Zeile steht noch genau ein Nichtnullelement $\mp\beta/l_{j_1j_2}$ in der Spalte k_2. Damit (4.25) erfüllt werden kann, muß $a_{k_2} = a_{k_1}$ gelten. Analog folgert man, daß $a_{k_i} = a_{k_1}$ für alle Spalten k_i gilt, die die Änderung von Γ in den Nachbarknoten von k_1 bzgl. der Diskretisierung von γ beschreiben. Für diese Knoten stellt man die gleichen Überlegungen bzgl. ihrer Nachbarknoten an. Da Ω zusammenhängend ist, erhält man als Resultat $a_1 = a_2 = \ldots = a_M$. (4.25) kann man damit zu

$$\left(\begin{array}{c} (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I) \sum_{j=1}^M A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{1,rand} \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I) \sum_{j=1}^M A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{2,rand} \\ \vdots \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I) \sum_{j=1}^M A(H_j) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{S,rand} \end{array} \right) = 0_{SK} \tag{4.26}$$

umformen. Die a_j sind eben so gewählt worden, daß die Linearkombination der die Regularisierung beschreibenden Spalten verschwindet, die entsprechenden Zeilen sind in (4.26) vernachlässigt. Es gilt nun

$$\sum_{j=1}^M A(H_j) = A(\Gamma = 1).$$

Damit geht (4.26) in

$$\left(\begin{array}{c} (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(1) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{1,rand} \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(1) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{2,rand} \\ \vdots \\ (-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(1) \begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix} \overline{U}_{S,rand} \end{array} \right) = 0_{SK} \tag{4.27}$$

über. Sei nun O.B.d.A. $U_{1,rand}$ ungleich 1_K. Aus

$$(-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(1)\begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix}\overline{U}_{1,rand} = 0_K$$

folgt

$$U^T_{1,rand}(-A^T_{inra}(\overline{\Gamma})A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma}), I)A(1)\begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix}\overline{U}_{1,rand} = 0. \tag{4.28}$$

Da im Lösungspunkt

$$\begin{pmatrix} -A^{-1}_{inn}(\overline{\Gamma})A_{inra}(\overline{\Gamma}) \\ I \end{pmatrix}\overline{U}_{1,rand} = \overline{U}_1$$

gilt, folgt aus (4.28)

$$\overline{U}^T_1 A(1)\overline{U}_1 = 0. \tag{4.29}$$

Wir wissen aber nun, daß $A(1)$ als Diskretisierung des Laplace-Operators positiv semidefinit mit Rangabfall 1 ist. Der Nullraum wird von 1_L aufgespannt. D.h. (4.29) ist genau dann erfüllt, wenn $\overline{U}_1 = 1_L$. Das steht aber im Widerspruch zur Wahl des Teilvektors $\overline{U}_{1,rand} \neq 1_K$ von $\overline{U}_1$. Damit sind die letzten M Spalten von C linear unabhängig.

Als letztes bleibt zu zeigen, daß die ersten KS Spalten von C und die letzte M Spalten untereinander linear unabhängig sind. Seien die Spalten von C mit c_j bezeichnet und gelte

$$\sum_{j=1}^{SK+M} a_j c_j = 0. \tag{4.30}$$

Auf Grund der Zeilen von C, die als einziges Nichtnullelement eine 1 aus einem Einheitsmatrizenblock enthalten, gilt $a_1 = \ldots a_{SK} = 0$. Damit geht (4.30) in

$$\sum_{j=SK+1}^{SK+M} a_j c_j = 0$$

über. Die letzten M Spalten sind aber linear unabhängig, d.h. $a_{SK+1} = \ldots a_{SK+M} = 0$ und C ist spaltenregulär. □

Bemerkungen 4.2 Sei $\overline{U}_{i,rand} = 1_K$. Dann ist $\overline{U}_i = 1_L$ die eindeutig bestimmte Lösung der Aufgabe

$$A(\Gamma)\overline{U}_i = 0$$

für jedes Γ. Die zugehörigen Neumanndaten sind $\overline{G}_i = 0_K$. Man hat also eine Messung durchgeführt, bei welcher für beliebiges Γ kein Strom fließt, eine Messung, die keinerlei Informationen liefert. Darum kann man aus praktischen Gründen verlangen, daß alle vorgegebenen Randspannungen $\overline{U}_{i,rand}$ ungleich 1_K sind.

Folgerung 4.3 *Die Matrix C ist in einer Umgebung der Lösung spaltenregulär.*

Beweis. Die Aussage folgt aus der stetigen Abhängigkeit von C von den Eingangsdaten Γ und U_i, $i = 1(1)S$. □

Die eben bewiesenen Aussagen könnte man vielleicht als Grundlage für den Beweis der lokalen Konvergenz des Gauß - Newton Verfahrens bei Anwendung auf das Elektrische - Impedanz - Tomographie Problem nehmen.

4.4 Lösung des Quadratmittelproblems

In diesem Abschnitt werden zwei mögliche Realisierungen der Lösung des linearen Quadratmittelproblems (4.24) vorgestellt. Eine Schätzung des numerischen Aufwandes dieser Vorgehensweisen wird ebenfalls angegeben.

Die QR-Zerlegung einer $(m \times n)$ - Matrix mittels Householder-Spiegelungen kostet nach [KS88], S.290,

$$\sim n^2(m - n/3) \text{ opms} \tag{4.31}$$

(opms - Operation, bei welcher eine Multiplikation und eine Addition ausgeführt wird). Hinzu kommen n Wurzelberechnungen. Zur Lösung eines $(m \times n)$ - linearen Quadratmittelproblems mittels Householder - Zerlegung ist nach der Faktorisierung die rechte Seite mit der orthogonalen Matrix zu multiplizieren und ein $(n \times n)$ Dreieckssystem zu lösen. Der Aufwand dazu ist quadratisch in m und n und kann gegenüber (4.31) vernachlässigt werden, d.h. die Lösung eines $(m \times n)$ - linearen Quadratmittelproblems kostet ebenfalls

$$\sim n^2(m - n/3) \text{ opms.}$$

Nach der Householder-Faktorisierung einer $(m \times n)$ - Matrix liegt der orthogonale Faktor nur in Produktdarstellung vor. Die Multiplikation dieser orthogonalen $(m \times m)$ - Matrix (oder ihrer Transponierten) mit einem Vektor kostet nach [KS88], S.293,

$$\sim (2m - n)n \text{ opms.}$$

Damit kostet die Multiplikation des orthogonalen Faktors der QR - Zerlegung mit einer $(m \times p)$ - Matrix

$$\sim (2m - n)np \text{ opms.} \tag{4.32}$$

Seien wiederum K die Anzahl der Randknoten bzgl. der Diskretisierung von u_i, $i = 1(1)S$, M die Anzahl der Knoten bzgl. der Diskretisierung von γ, R die Anzahl der Gleichungen, die durch die Regularisierung in (4.24) hinzukommen und S die Anzahl der Datensätze.

Eine Möglichkeit ist, das Quadratmittelproblem (4.24) in einem Schritt mittels QR - Faktorisierung von C zu lösen. Die Matrix C hat die Dimension $(2SK+R)\times(SK+M)$. Diese Lösungsvariante kostet nach (4.31)

$$\sim (SK + M)^2 \left(\frac{5}{3}SK + R - \frac{M}{3}\right) \text{ opms.} \tag{4.33}$$

Ein Nachteil dieser Verfahrensweise ist, daß man, um einen Standardsolver anwenden zu können (z.B. eine LINPACK - Routine), die Matrix C in geschlossener Form abspeichern muß. Damit ist eine mehrfache Speicherung der Blöcke $X1$ und I sowie eine Speicherung mehrerer Nullblöcke verbunden.

Eine zweite Möglichkeit zur Lösung des linearen Quadratmittelproblems (4.24) beginnt mit der QR - Zerlegung von

$$\begin{pmatrix} X1 \\ I \end{pmatrix} = Q_1 R_1$$

mittels Householder - Verfahren. Die Blöcke $X1$ und I haben jeweils die Dimension $K \times K$. Somit kostet diese Zerlegung nach (4.31)

$$\sim \frac{5}{3} K^3 \quad \text{opms.}$$

Danach multipliziert man die Blöcke

$$\begin{pmatrix} X2_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad , i = 1(1)S$$

mit der $(2K \times 2K)$ - Matrix Q_1^T. Das kostet nach (4.32)

$$\sim 2SK^2M \quad \text{opms.}$$

Die rechte Seite wird ebenfalls mit Q_1^T multipliziert, der Aufwand dafür wird vernachlässigt. Bezeichnet man die Größen, die man nach den Multiplikationen mit Q_1^T erhält, mit einem Dach, so hat das lineare Quadratmittelproblem nach Umordnungen die Gestalt

$$\min_{\mathcal{H}} \left\| \begin{pmatrix} R_1 & & & & \widehat{X2}_1 \\ & R_1 & & & \widehat{X2}_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & R_1 & \widehat{X2}_S \\ & & & & \widehat{X2}_{11} \\ & & & & \widehat{X2}_{22} \\ & & & & \vdots \\ & & & & \widehat{X2}_{SS} \\ & & & & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U_{1,rand} \\ \vdots \\ \Delta U_{S,rand} \\ \Delta\Gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{X3}_1 \\ \widehat{X3}_2 \\ \vdots \\ \widehat{X3}_S \\ \widehat{U_{1,rand} - \overline{U}_{1,rand}} \\ \widehat{U_{2,rand} - \overline{U}_{2,rand}} \\ \vdots \\ \widehat{U_{S,rand} - \overline{U}_{S,rand}} \\ b \end{pmatrix} \right\|^2$$

mit $\mathcal{H} = \{\Delta U_{1,rand}, \dots \Delta U_{S,rand}, \Delta\Gamma\}$. Mit $\widehat{X_{ii}}$, $i = 1(1)S$ sind die Blöcke bezeichnet, die in (4.24) an der Stelle der Nullblöcke unter $X2_i$ sind. Die Umordnung der Blöcke wird bei der Realisierung im Programm nur logisch und nicht physisch vorgenommen. Nun kann man das lineare Quadratmittelproblem

$$\text{(4.34)} \qquad \min_{\Delta\Gamma} \left\| \begin{pmatrix} \widehat{X2_{11}} \\ \widehat{X2_{22}} \\ \vdots \\ \widehat{X2_{SS}} \\ B \end{pmatrix} \Delta\Gamma + \begin{pmatrix} \widehat{U_{1,rand} - \overline{U}_{1,rand}} \\ \widehat{U_{2,rand} - \overline{U}_{2,rand}} \\ \vdots \\ \widehat{U_{S,rand} - \overline{U}_{S,rand}} \end{pmatrix} \right\|^2$$

lösen. Wir bezeichnen die Matrix dieses Systems mit $X4$, die rechte Seite mit $X5$. Dann hat $X4$ die Dimension $(SK+R)\times M$ und die Lösung des Quadratmittelproblems kostet nach (4.31)

$$\sim M^2 \left(SK + R - \frac{M}{3} \right) \text{ opms.}$$

Nachdem $\Delta\Gamma$ berechnet worden ist, wird dieser Vektor in die oberen Gleichungen eingesetzt, d.h. mit $\widehat{X2_i}$, $i = 1(1)S$, multipliziert. Damit erhält man S entkoppelte Dreieckssysteme zur Berechnung von $\Delta U_1, \dots, \Delta U_S$. Die Kosten der letzten beiden Schritte sind im Vergleich zu den Kosten der QR - Zerlegungen vernachlässigbar. Als Gesamtkosten ergeben sich für diese Vorgehensweise somit

$$\text{(4.35)} \qquad \sim \frac{5}{3}K^3 + 2SK^2M + SKM^2 + M^2R - \frac{1}{3}M^3 \text{ opms.}$$

Durch Umformungen ergibt sich der Aufwand (4.33) der ersten Vorgehensweise zu

$$\sim 2SKMR + S^2K^2R + S\left(\frac{5}{3}K^3 + 3SK^2M\right) + SKM^2 + M^2R - \frac{1}{3}M^3 \text{ opms.}$$

Die letzten drei Summanden stimmen mit denen von (4.35) überein. Der 3.Summand ist größer als der 1.Summand von (4.35). Die ersten zwei Summanden sind nicht negativ. Somit ist (4.33) größer als (4.35), die zweite Variante der Lösung von (4.24) ist also billiger als die erste Variante. In (5.2) und (5.3) werden (4.33) und (4.35) für ein konkretes Beispiel in Abhängigkeit von der Feinheit der Diskretisierung eines Grundgebietes Ω und der Anzahl der Datensätze berechnet. Man wird sehen, daß diese Größen in der höchsten Potenz gleich sind.

4.5 Anwendung des gedämpften Gauß-Newton Verfahrens

Es ist bekannt, daß das Gauß-Newton Verfahren i.a. nur lokal konvergiert. Eine Möglichkeit, um globale Konvergenz zu erreichen, ist die Dämpfung der Gauß-Newton Korrektur mit einem geeigneten Faktor $\alpha \in (0,1]$. Zur Festlegung des Parameters α gibt es verschiedene Strategien. Es soll hier kurz ein Verfahren vorgestellt werden, welches ursprünglich von [Kno89] stammt und dann von [Sch91] vereinfacht wurde.

Sei ein Quadratmittelproblem der Gestalt

$$\min \{||H(z)|| \;:\; W(z) = 0\}$$

$$H : R^n \mapsto R^m \;,\; W : R^n \mapsto R^l$$

zu lösen. H und W seien differenzierbar, die Jacobi - Matrizen werden mit H' und W' bezeichnet. Ferner gelte

$$rang(W'(z)) = l \;, \qquad rang \begin{pmatrix} H'(z) \\ W'(z) \end{pmatrix} = n.$$

Mit Hilfe des Gauß-Newton Verfahrens sei die Korrektur σ berechnet worden. Man definiert eine Straffunktion

$$\psi(z,\mu) = ||H(z)|| + \mu||W(z)||. \tag{4.36}$$

Weiterhin sei

$$\phi(z,\alpha\sigma,\mu) = ||H + H'\alpha\sigma|| + \mu||W + W'\alpha\sigma||.$$

Der Parameter α soll durch Minimierung von (4.36) bestimmt werden. (4.36) wird jedoch nicht exakt minimiert (zu aufwendig), sondern es werden der tatsächliche Abstieg von (4.36) und der durch das Gauß-Newton Modell vorhergesagte Abstieg miteinander verglichen. Es soll α so bestimmt werden, daß

$$\psi(z,\mu) - \psi(z+\alpha\sigma,\mu) \geq \delta(\psi(z,\mu) - \phi(z,\alpha\sigma,\mu)) \tag{4.37}$$

mit

$$\delta \in (0,1)$$

gilt. In [Sch91] ist gezeigt, daß bei geeignet gewähltem μ ein α so existiert, daß (4.37) gilt. Um solch ein geeignet gewähltes μ festzulegen, ist die Größe

$$\omega = \begin{cases} \frac{||H+H'\sigma||-||H||}{||W||} & \text{für } ||H+H'\sigma|| - ||H|| > 0, ||W|| > 0 \\ 0 \qquad \text{sonst} & \end{cases}$$

zu berechnen. Dann sieht der Modellalgorithmus eines gedämpften Gauß-Newton Verfahrens mit der oben beschriebenen Berechnung von α folgendermaßen aus :

S0 Initialisierung

wähle $\delta \in (0,1)$, $\theta \in (0,1)$, $\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2 \in R$ mit $0 < \overline{\mu}_1 < \overline{\mu}_2$, z^0

setze $\alpha_{-1} := 1$, $\mu{-}1 := 0$, $k := 0$

Sk k-ter Iterationsschritt

Sk1 berechne Gauß-Newton Korrektur σ^k

IF $\sigma^k = 0$ THEN STOP

Sk2 setze

$$\mu_k := \begin{cases} \mu_{k-1} & IF \quad \mu_{k-1} \geq \omega_k + \overline{\mu}_1 \\ \overline{\mu}_2 + \omega_k & ELSE \end{cases}$$

Sk3 setze $\alpha_k := \min(\alpha_{k-1}/\theta, 1)$

Sk4 WHILE $\psi(z,\mu) - \psi(z+\alpha\sigma,\mu) < \delta(\psi(z,\mu) - \phi(z,\alpha\sigma,\mu))$

DO $\alpha_k := \gamma\alpha_k$

Sk5 setze $z^{k+1} := z^k + \alpha_k\sigma^k$, $k := k+1$, GOTO Sk1

Die soeben beschriebene Methode soll auf (4.24) mit den Nebenbedingungen (4.10) angewandt werden. Dem Vektor z entspricht

$$(U_{1,inn}, \ldots, U_{S,inn}, U_{1,rand}, \ldots, U_{S,rand}, G_1, \ldots, G_S, \Gamma)^T.$$

Diese Größen werden als unabhängig angesehen. Der Regularisierungsterm hat die Gestalt $B\Gamma$ mit einer von den obigen Größen unabhängigen Matrix B. Dann gilt

$$H = \begin{pmatrix} U_{1,rand} - \overline{U}_{1,rand} \\ \vdots \\ U_{S,rand} - \overline{U}_{S,rand} \\ G_1 - \overline{G}_1 \\ \vdots \\ G_S - \overline{G}_S \\ B\Gamma \end{pmatrix}$$

und

$$H' = \begin{pmatrix} I & \\ & B \end{pmatrix},$$

wobei die Dimension der Einheitsmatrix I der Gesamtanzahl der Elemente von $(U_{1,rand}, \ldots, U_{S,rand}, G_1, \ldots, G_S)^T$ entspricht. Sei

$$\sigma = (\Delta U_{1,inn}, \ldots, \Delta U_{S,inn}, \Delta U_{1,rand}, \ldots, \Delta U_{S,rand}, \Delta G_1, \ldots, \Delta G_S, \Delta\Gamma)^T,$$

dann ist

$$H + H'\alpha\sigma = \begin{pmatrix} U_{1,rand} + \alpha\Delta U_{1,rand} - \overline{U}_{1,rand} \\ \vdots \\ U_{S,rand} + \alpha\Delta U_{S,rand} - \overline{U}_{S,rand} \\ G_1 + \alpha\Delta G_1 - \overline{G}_1 \\ \vdots \\ G_S + \alpha\Delta G_S - \overline{G}_S \\ B(\Gamma + \alpha\Delta\Gamma) \end{pmatrix},$$

d.h.

$$H(z) + H'(z)\alpha\sigma = H(z + \alpha\sigma).$$

Der Term $W(z) + W'(z)\alpha\sigma$ ist die Linearisierung der Nebenbedingungen im Punkte z mit dem Inkrement $\alpha\sigma$. Damit entspricht dies der rechten Seite von (4.13) mit $\alpha\sigma$ anstelle von σ.

Die Umsetzung des gedämpften Gauß - Newton Verfahrens erfolgt in einer etwas abgewandelten Form. Die Lösung des linearen Quadratmittelproblems (4.24) besteht nicht aus dem gesamten Vektor z, sondern nur aus den Komponenten $\Delta\Gamma$ und $\Delta U_{i,rand}$. Diese werden wie eben beschrieben mit dem Faktor α gedämpft. Die anderen Komponenten von z, $\Delta U_{i,inn}$ und ΔG_i, werden wiederum durch (4.22) und (4.23) berechnet. Damit sind die linearisierten Nebenbedingungen bei jeder Dämpfung erfüllt und es gilt

$$||W + W'\alpha\sigma|| = 0.$$

Kapitel 5

Testrechnungen

5.1 Die gewählten Testbeispiele

Wir führen Testrechnungen in $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ aus. $[0,1] \times [0,1]$ wird dazu in finite Elemente zerlegt (Abb. 5.1). Diese finiten Elemente sind kongruente, rechtwinklige

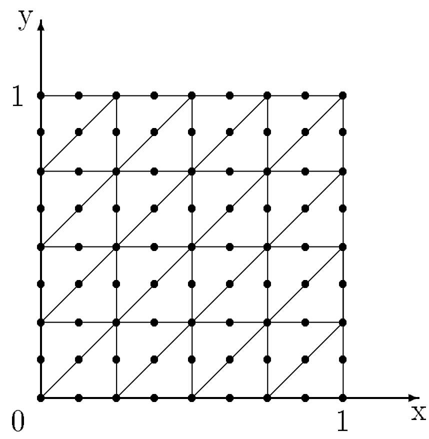


Abbildung 5.1: Diskretisierung von u

und gleichschenklige Dreiecke der Kathedenlänge $1/N$. Zur Diskretisierung der u_i verwenden wir den in Kapitel 3.2 vorgestellten quadratischen Ansatz im Dreieck. Durch diesen Ansatz werden in $[0,1] \times [0,1]$ stetige und stückweise quadratische Funktionen u_i eindeutig bestimmt. Die Funktion γ wird gröber diskretisiert, Abb. 5.2. Wir

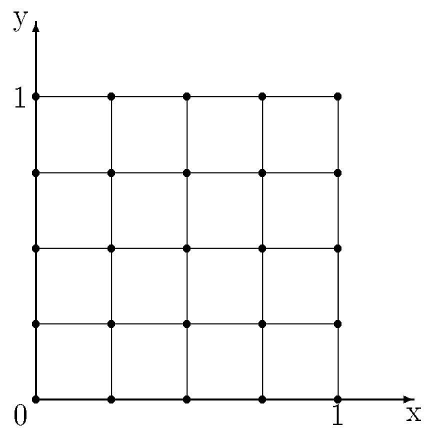


Abbildung 5.2: DISKRETISIERUNG VON γ

müssen allen Knoten, die zur Diskretisierung von u_i gehören, zur Durchführung der FEM Werte von GAMMA zuordnen, wobei GAMMA die Diskretisierung von γ ist. In Abb. 5.3 sind für die Knoten mit den vollen Kreise Werte von GAMMA durch die Diskretisierung von γ gegeben. Den Knoten mit den leeren Kreisen müssen Werte für GAMMA zugeordnet werden. Die Interpolation geschieht in folgender Art und Weise:

$$
\begin{aligned}
GAMMA(2) &= (GAMMA(1) + GAMMA(3))/2 \\
GAMMA(4) &= (GAMMA(1) + GAMMA(7))/2 \\
GAMMA(6) &= (GAMMA(3) + GAMMA(9))/2 \\
GAMMA(8) &= (GAMMA(7) + GAMMA(9))/2 \\
GAMMA(5) &= (GAMMA(1) + GAMMA(3) + GAMMA(7) \\
&\quad +GAMMA(9))/4.
\end{aligned} \tag{5.1}
$$

Die Numerierung der Knoten erfolgt wie in Abb. 5.4, d.h. die inneren Knoten

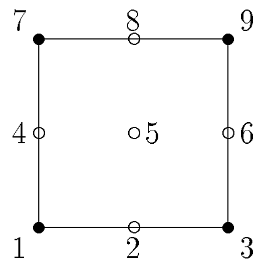


Abbildung 5.3: Zur Interpolation von γ

haben die niedrigen Nummern und die äußeren Knoten die hohen Nummern.

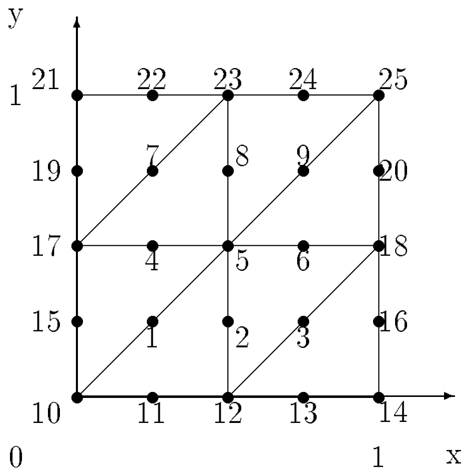


Abbildung 5.4: Numerierung der Knoten

Mit dieser Numerierung hat die Gesamtsteifigkeitsmatrix A die Struktur

$$\begin{pmatrix} A_{inn} & A_{inra} \\ A_{inra}^T & A_{rand} \end{pmatrix},$$

(vgl. Abschnitt 3.4).

Beispiele für γ

Als Beispiele für γ wurden gewählt :

$$
\begin{array}{lll}
1 & : & \gamma(x,y) = 2 \\
2 & : & \gamma(x,y) = (1+0.2(x+y^2))(1+0.2x^2+0.3y) \\
3 & : & \gamma(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{falls } y \geq 0.5 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
4 & : & \gamma(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{falls } (0.25 \leq x \leq 0.75) \wedge (0.25 \leq y \leq 0.75) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \\
5 & : & \gamma(x,y) = 1 + (\sin(\pi x)\sin(\pi y))^2 \\
6 & : & \gamma(x,y) = \begin{cases} 3 & \text{falls } (0.1 \leq x \leq 0.4) \wedge (0.5 \leq y \leq 0.9) \\ 1 & \text{falls } (0.6 \leq x \leq 0.8) \wedge (0.1 \leq y \leq 0.7) \\ 2 & \text{sonst} \end{cases} .
\end{array}
$$

In der ersten Spalte steht die Beispielnummer, wie sie als Parameter INFO der Routine BEISP.FOR übergeben wird. Die Diskretisierungen der obigen Funktionen werden im Feld GAMMA gespeichert. Die Wahl dieser Beispiele ist an [Jia90] und [KM90] angelehnt.

Beispiele für die Randdaten

Sei

$$f(z) = \sin(\pi z), \quad 0 \leq z \leq 1.$$

Wir wählen $\overline{u}_{i,rand} = f(z)$ auf einer Seite des Quadrates $[0,1] \times [0,1]$ und $\overline{u}_{i,rand} = 0$ auf den anderen drei Seiten. Dabei ist z entweder x oder y. Damit haben wir vier Sätze unabhängiger Dirichletdaten. Zu Beginn des Programmes kann man entscheiden, wie viele davon genutzt werden sollen. Die Wahl dieser Randdaten ist an [Jia90] angelehnt.

5.2 Programmbeschreibung ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

In diesem Kapitel werden die einzelnen Subroutinen des Programmes, in dem das ungedämpfte Gauß - Newton Verfahren umgesetzt ist, und ihr Zusammenwirken beschrieben. Innerhalb jeder Routine befindet sich im Quelltext zudem eine ausführliche Beschreibung der ausgeführten Schritte.

5.2.1 Wichtige Größen in den selbst erstellten Programmteilen

Parameter

Mit Hilfe der Parameter werden die Dimensionen der einzelnen Felder am Anfang des Programms festgelegt. Im Programm gibt es nur zwei unabhängige Parameter. Dies ist zum einen die maximale Feinheit der Diskretisierung MAXN und zum anderen die maximale Anzahl der Datensätze MAXDAT.

MAXN	Anzahl der gleichlangen Intervalle, in die das Intervall $[0,1]$ auf der x - Achse und der y - Achse unterteilt werden kann
MAXKNOT	$=(2MAXN+1)^2$, Maximalanzahl der Knoten bzgl. der Diskretisierung der u_i, $i=1(1)MAXDAT$
KNOTINN	$=(2MAXN-1)^2$, Maximalanzahl der inneren Knoten bzgl. der Diskretisierung der u_i
KNOTAUS	$=8MAXN$, Maximalanzahl der äußeren Knoten bzgl. der Diskretisierung der u_i
MAXGAM	$=(MAXN+1)^2$, Maximalanzahl der Knoten der Diskretisierung von γ
MAXDIAG	$=4MAXN+1$, Maximalanzahl der belegten Diagonalen des oberen Dreiecks von A_{inn} (Hauptdiagonale und 4 MAXN obere Nebendiagonalen)

MAXREGU = $2MAXN(MAXN+1)$, Maximalanzahl der Regularisierungsgleichungen, entspricht Anzahl der Strecken zwischen zwei benachbarten Gitterpunkten in Abb. 5.2

MAXAUS = $84MAXN - 46$, Maximaldimension der Felder AAUS, SPAAUS und ZEIAUS, vgl. Abb. 5.6

MAXDAT maximale Anzahl von Datensätzen

Die Festlegung von MAXN und MAXDAT bestimmt letzten Endes die Größe des vom Linker erstellten EXE - Files. Auf einem PC unter DOS ist die erlaubte Maximalgröße schnell erreicht (z.B. MAXN = 6, MAXDAT = 4).

Am Programmanfang sind die Größen

N Anzahl der gleichlangen Intervalle, in die das Intervall $[0, 1]$ auf der x - Achse und der y - Achse unterteilt wird, $N \leq MAXN$

NMAXDAT Anzahl der verwendeten Datensätzen, $NMAXDAT \leq MAXDAT$

einzulesen. Sie bestimmen die Dimension des zu lösenden Problems. Die zu diesem Problem gehörenden Parameter haben als ersten Buchstaben ein "N", also NMAXKNOT, NKNOTINN usw.

Informationen über die Diskretisierung

In folgenden Feldern sind Informationen über die Diskretisierung gespeichert :

AUKNTYP Informationen über die Randknoten, vgl. KNOTART.FOR

DADGAKNO Informationen über Diskretisierung von γ, vgl. GAMKNOT.FOR

NI Informationen über Diskretisierung der u_i, Knotennummern der einzelnen Dreiecke, vgl. KNOTNUM.FOR .

Informationen über $A(H_j)$, vgl. (4.16)

Die Berechnung der unten genannten Größen wird in SEIBERE.FOR beschrieben.

SEI die acht Elementmatrizen der Dreiecke gemäß Abb. 5.10

SE18	Summe der acht Elementmatrizen gemäß Abb. 5.10, entspricht $A(H_j)$ für inneren Knoten j
SEIKNOT	Knotennummern gemäß Abb. 5.11

Größen für Gauß-Newton Verfahren

AAUS	enthält Nichtnullelemente von A_{inra} und des oberen Dreiecks von A_{rand}
AAUSANZ	aktuelle Anzahl der Nichtnulleinträge in AAUS, SPAAUS und ZEIAUS
AINN	enthält zunächst die Nichtnulldiagonalen des oberen Dreiecks von A_{inn}, später den mit DPBFA.FOR berechneten oberen Dreiecksfaktor der Cholesky-Zerlegung von A_{inn}
ARANDANF	Stelle des ersten Auftretens eines Elementes von A_{rand} in AAUS
BSPNR	Beispielnummer, wird am Programmanfang eingegeben
DADGAMU	enthält $\frac{\partial A}{\partial \Gamma} U_i$, $i = 1(1)NMAXDAT$
DELGAM	Speicherung von $\Delta\Gamma$
DELGNORM	$\|\|\Delta\Gamma\|\|^2$
DELUAUS	$\Delta U_{i,rand}$, $i = 1(1)NMAXDAT$
FSTRICH	$\overline{F}_i = \overline{U}_{i,rand}$, $i = 1(1)NMAXDAT$
G	enthält G_i, $i = 1(1)NMAXDAT$
GAMMA	Speicherung von Γ
GSTRICH	enthält $\overline{G}_i$, $i = 1(1)NMAXDAT$
MAXSTEP	maximale Anzahl von Iterationen, wird am Programmanfang eingegeben
RANDNORM	Norm des Fehlerfunktionales (4.9)
REGUPAR	Regularisierungsparameter, wird zum Programmanfang eingegeben
RUND	gibt Nachkommastelle an, auf die FSTRICH und GSTRICH gerundet werden sollen, bei RUND = 0 erfolgt keine Rundung, wird am Programmanfang eingegeben
SPAAUS	enthält Informationen über die Spalten der Elemente von AAUS
STEP	Nummer des aktuellen Iterationschrittes
TOL	Toleranz für Abbruchkriterium

U	enthält U_i, $i = 1(1)NMAXDAT$
X	Matrix gemäß (4.17)
X1	Matrix gemäß (4.17)
X2	Matrix gemäß (4.17)
X3	Matrix gemäß (4.17)
X4	Matrix gemäß (4.34)
X5	Vektor gemäß (4.34)
Y	Matrix gemäß (4.17)
ZEIAUS	enthält Informationen über die Zeilen der Elemente von AAUS

5.2.2 Selbst erstellte Programmteile

Die selbst erstellten Routinen sind in alphabetischer Reihenfolge aufgeführt. Das Hauptprogramm ist EIT.FOR.

ABERECH.FOR

In ABERECH.FOR wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix A aus Abschnitt 3.2 für gegebenes GAMMA berechnet. Der Block von A, der die Beziehungen der inneren Knoten untereinander beschreibt, im Abschnitt 3.4 mit A_{inn} bezeichnet, wird im Feld AINN gespeichert. Bei der Numerierung der inneren Knoten gemäß Abb. 5.4 ist A_{inn} eine symmetrische und quadratische Bandmatrix mit 4N besetzten oberen Nebendiagonalen und der Dimension $(2N-1)^2$. AINN hat die Dimension $(4N+1) \times (2N-1)^2$. Es wird nur das obere Dreieck von A_{inn} gespeichert, die Zeilen von AINN sind die Diagonalen von A_{inn}, siehe Abb. 5.5.

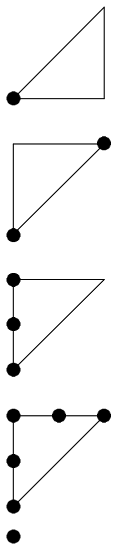
Die Elemente, die die Beziehungen der Randknoten zu inneren Knoten und der Randknoten untereinander beschreiben, in Kapitel 3.4 die Blöcke A_{inra} und A_{rand} von A, werden zunächst in der Reihenfolge ihrer Berechnung im Feld AAUS gespeichert, die zugehörigen Informationen über die beteiligten Knoten in den Feldern ZEIAUS und

$$
\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
 & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & \cdots \\
 & & a_{33} & a_{34} & a_{35} & 0 & \cdots \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots
\end{pmatrix}
\Longrightarrow
\begin{pmatrix}
0 & 0 & a_{13} & a_{24} & \cdots \\
0 & a_{12} & a_{23} & a_{34} & \cdots \\
a_{11} & a_{22} & a_{33} & a_{44} & \cdots
\end{pmatrix}
$$

Abbildung 5.5: SPEICHERUNG EINER SYMMETRISCHEN BANDMATRIX

SPAAUS. Da A insgesamt symmetrisch ist, werden von A_{rand} nur Informationen über das obere Dreieck gespeichert. Die Anzahl der möglichen Beziehungen der Randknoten zu inneren Knoten und der Randknoten untereinander bestimmt die Dimension MAXAUS von AAUS, ZEIAUS und SPAAUS, siehe nächster Absatz. Nachdem alle finiten Elemente abgearbeitet worden sind, werden in AAUS alle Einträge zeilenweise und innerhalb jeder Zeile spaltenweise geordnet. Ein Element der Blöcke A_{inra} und A_{rand} kann mehrere Einträge besitzen, die von verschiedenen finiten Elementen stammen. Diese werden auf einem dieser Einträge in AAUS addiert, die betreffenden Mehrfacheinträge gelöscht und die so entstandenen Lücken in AAUS aufgefüllt. Dies geschieht, indem das nächste nicht gelöschte Element von AAUS an die betreffende freie Stelle nach vorn geschoben wird. Als Ergebnis erhält man eine zeilenweise und in jeder Zeile spaltenweise geordnete Speicherung der Nichtnullelemente von A_{inra} und des oberen Dreiecks von A_{rand} im Feld AAUS mit den zugehörigen Zeilenindizes in ZEIAUS und den Spaltenindizes in SPAAUS.

Wir betrachten die finiten Elemente, die am Rand von $[0,1]\times[0,1]$ liegen. Bezüglich der Anzahl von Randknoten gibt es vier verschiedene Typen, siehe Abb. 5.6. Bei der Berechnung der Elementmatrizen erhält man symmetrische 6×6- Matrizen, von denen nur das obere Dreieck interessiert. Die Höchstanzahl der Nichtnullelemente einer Elementmatrix, die zunächst in AAUS gespeichert werden, steht für jeden Dreieckstyp



Anzahl	Einträge
4(N-2)	6
2	11
4(N-1)	15
2	20

Randknoten

Abbildung 5.6: Dreieckstypen bezüglich der Randknoten

in der rechten Spalte der Abb. 5.6. In der linken Spalte steht die Anzahl der jeweiligen Dreieckstypen bezüglich der Randknoten. Diese Anzahl kann man sich leicht an Abb. 5.1 veranschaulichen. Man erhält als ausreichende Dimension für AAUS, ZEIAUS und SPAAUS

$$MAXAUS = 84N - 46.$$

Desweiteren gibt AAUSANZ die Anzahl der aktuellen Dimension von AAUS an, ARANDANF die Stelle des ersten Elementes von A_{rand} in AAUS.

Output : AINN, AAUS, SPAAUS, ZEIAUS, AAUSANZ, ARANDANF

Aufrufende Routinen : EIT.FOR, STARTW.FOR

Aufgerufene Routine : ELEMAT.FOR

ABWEICH.FOR

In der Double Precision Function ABWEICH.FOR wird der Fehler

$$\sum_{i=1}^{NMAXDAT} ||U(.,i)_{rand} - FSTRICH(.,i)||^2 + ||G(.,i) - GSTRICH(.,i)||^2$$

berechnet.

Output : ABWEICH

Aufrufende Routine : EIT.FOR

Aufgerufene Routine : DDOT.FOR

ANACHGAM.FOR

Die Subroutine ANACHGAM.FOR dient der Berechnung von

$$\frac{\partial A}{\partial \Gamma}U = (A(H_j)U)_{j=1(1)NMAXGAM}.$$

Diese Routine wird nacheinander für die $U(.,i)$, $i = 1(1)NMAXDAT$, abgearbeitet. Innerhalb von ANACHGAM.FOR werden die Ergebnisse im Feld DADGAMU gespeichert. Die Speichertechnik in DADGAMU orientiert sich an Speicherung der Informationen über GAMMA im Feld DADGAKNO (siehe GAMKNOT.FOR). DIe j-te Spalte von DADGAMU(.,i) ergibt sich durch $A(H_j)U(.,i)$. Die Matrix $A(H_j)$ besitzt höchstens 25 Zeilen, die keine Nullzeilen sind (vgl. SEIBERE.FOR). D.h. der Vektor $A(H_j)U(.,i)$ besitzt höchstens 25 Nichtnullelemente. Die Indizes dieser Nichtnullelemente sind durch die Nachbarknoten des Knotens j gemäß Abb. 5.8 gegeben. Diese Indizes sind die Einträge der j-ten Spalte von DADGAKNO. Die Nichtnulleinträge für DADGAMU werden berechnet und in der Zeile in der j-ten Spalte von DADGAMU gespeichert, in der in DADGAKNO der zugehörige Index steht.

Bei der Berechnung von $(\frac{\partial A}{\partial \Gamma}U_i)_j$ für einen inneren Knoten j wird das Feld SE18 verwendet. Bei Randknoten wird zunächst getestet, welche Dreieckstypen am jeweiligen Knoten vorliegen (vgl. SEIBERE.FOR). Dann werden die Elemente der zu den

vorliegenden Dreieckstypen gehörenden Elementmatrizen SEI(.,.,1) - SEI(.,.,8) mit den entsprechenden Elementen von U multipliziert und in DADGAMU aufdatiert.
Output : DADGAMU
Aufrufende Routine : EIT.FOR

BEISP.FOR

In BEISP.FOR sind die Beispiele für γ programmiert. Der Parameter INFO gibt die Nummer des gewählten Beispiels an. Diese Routine wird nur am Programmstart aufgerufen.
Output : GAMMA
Aufrufende Routine : EIT.FOR

DREISYS.FOR

In DREISYS.FOR werden die Dreieckssysteme

$$\begin{aligned} Rx &= b \qquad \text{im Fall INFO} = 1, \\ R^T x &= b \qquad \text{im Fall INFO} = 2 \end{aligned}$$

gelöst. Dabei ist R der obere Dreiecksfaktor der Cholesky-Zerlegung von A_{inn}, der im Feld AINN gespeichert ist.
Output : X
Aufrufende Routine : MATBERE.FOR

EIT.FOR

EIT.FOR ist das Hauptprogramm. In EIT.FOR wird der Programmablauf wie in Abb. 5.7 dargestellt gesteuert.

Da wir keine realen Meßdaten besitzen, wird mit synthetischen Daten gerechnet. D.h. wir geben uns zuerst eine Leitfähikeit γ vor und erzeugen GAMMA. Weiter geben wir uns Sätze von Dirichletdaten $\overline{u}_{i,rand}$ vor, aus denen wir $\overline{U}(.,i)_{rand} =$

$FSTRICH(.,i)$, $i = 1(1)NMAXDAT$, erzeugen. Mit diesen Vorgaben lösen wir die NMAXDAT Dirichletprobleme und rekonstruieren die zugehörigen Neumanndaten GSTRICH(.,i). Aus diesen Werten FSTRICH und GSTRICH, die auf Wunsch durch Rundung noch gestört werden können, sowie einer Startschätzung für GAMMA, wird die vorgegebene Lösung GAMMA wieder rekonstruiert.
Aufgerufenen Routinen : SEIBERE.FOR, GAMKOT.FOR, KNOTART.FOR, BEISP.FOR, RANDU.FOR, STARTW.FOR, DPBFA.FOR, ANACHGAM.FOR, MATBERE.FOR, REGULARI.FOR, LEASQU.FOR, KORREK.FOR, GAMMABER.FOR, ABWEICH.FOR, DDOT.FOR

ELEMAT.FOR

In der Subroutine ELEMAT.FOR wird die Elementmatrix S_e gemäß (3.9) berechnet. Auf Grund der gleichmäßigen Triangulierung des Einheitsquadrats gelten $b = -1$ und $DET = |T| = 4/N^2$.
Output : SE
Aufrufende Routine : ABERECH.FOR
Aufgerufenen Routinen : S1BERE.FOR, S2BERE.FOR, S3BERE.FOR

GAMKNOT.FOR

Die Subroutine GAMKNOT.FOR dient zur Berechnung der Elemente des Feldes DADGAKNO. In diesem sind Informationen über die Diskretisierung von γ gespeichert. Die Diskretisierung von γ wird im Feld GAMMA gespeichert. Sei j ein Knoten der Diskretisierung von γ, ein Wert GAMMA(j) ist gegeben. Dann gibt es eine Spalte in DADGAKNO mit DADGAKNO($\cdot$,13) = j . Die Elemente von DADGAKNO$(\cdot, j_i)$, $j_i = 1(1)25$, sind mit den Nummern der Nachbarknoten von j belegt, in der Reihenfolge, wie es in Abb. 5.8 zu sehen ist, d.h. DADGAKNO($\cdot$,13) = j, DADGAKNO($\cdot$,1) = Knotennummer des Knotens 1 aus Abb. 5.8 usw.

Programmablauf

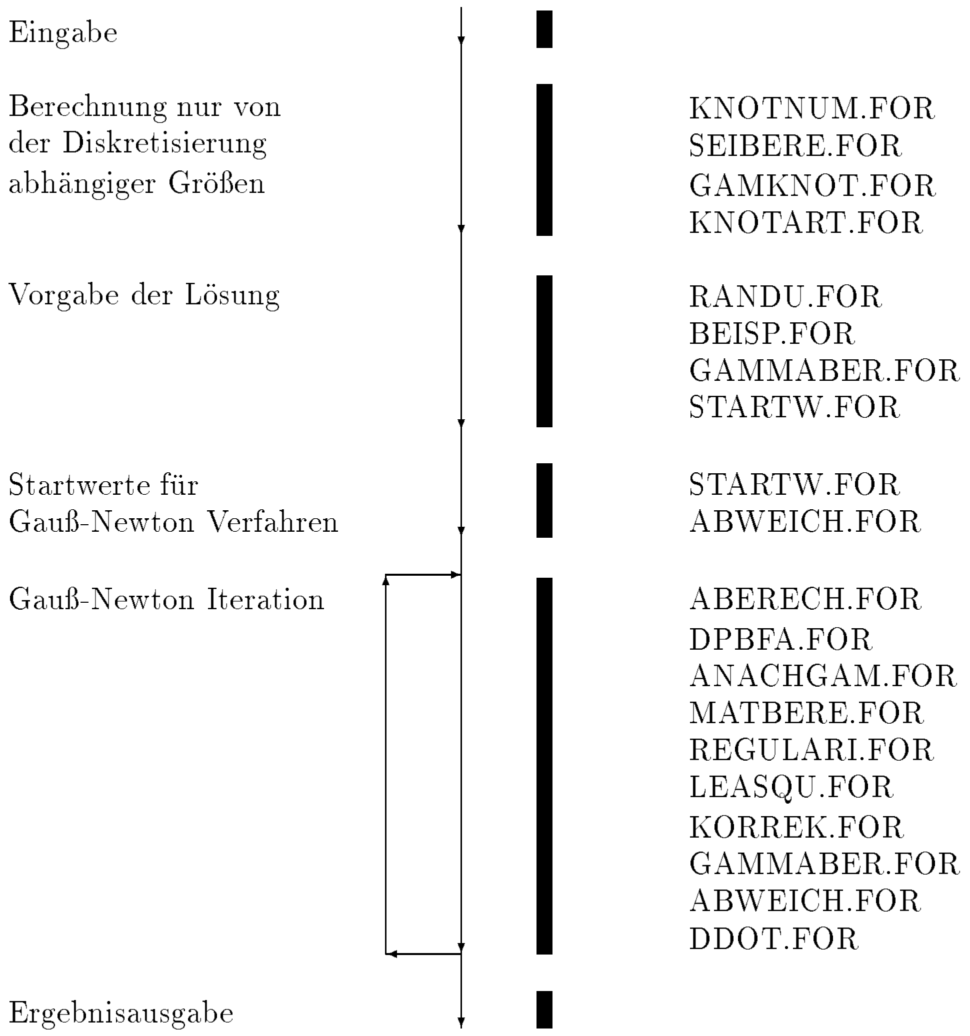


Abbildung 5.7: Schema des Programmablaufes

Bei Randknoten sind nicht alle Nachbarknoten gemäß Abb.5.8 vorhanden, die nicht benötigten Stellen in DADGAKNO werden mit Null belegt. In den vorderen Spalten von DADGAKNO werden Informationen über die inneren Knoten der Diskretisierung von γ gespeichert, in den hinteren Spalten Informationen über die Randknoten. GAMKNOT.FOR wird nur am Programmstart aufgerufen.
Output : DADGAKNO

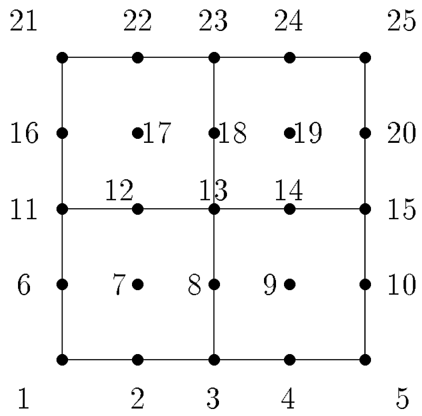


Abbildung 5.8: SPEICHERUNG DER KNOTEN IN DADGAKNO

Aufrufende Routine : EIT.FOR

GAMMABER.FOR

Die Subroutine GAMMABER.FOR dient zum einen der Aufdatierung von GAMMA in den Knoten, die zur Diskretisierung von γ gehören und zum anderen der Interpolation von GAMMA in Knoten, die zur Diskretisierung von u aber nicht zur Diskretisierung von γ gehören. Die Werte, um die GAMMA aufdatiert werden soll, werden im Feld DELGAM übergeben. Die Interpolation erfolgt gemäß (5.1) und Abb. 5.3. In GAMMABER.FOR werden die in DADGAKNO gespeicherten Informationen über die Diskretisierung von γ genutzt.
Output : GAMMA
Aufrufende Routine : EIT.FOR

KNOTART.FOR

Im Abschnitt 3.3 ist gezeigt, daß man bei der Berechnung der Neumanndaten aus der Diskretisierung des Neumannoperators unterscheiden muß, ob ein Randknoten Anfangs-/Endpunkt eines finiten Randelementes oder Mittelpunkt dieses Randelemen-

tes ist. In der Subroutine KNOTART.FOR werden die diesbezüglichen Informationen im Feld AUKNTYP gespeichert: Anfangs-/Endpunkte werden mit .TRUE. gekennzeichnet, Mittelpunkte mit .FALSE. . Diese Routine wird nur zum Programmstart aufgerufen.
Output : AUKNTYP
Aufrufende Routine : EIT.FOR

KNOTNUM.FOR

In KNOTNUM.FOR werden Informationen über die Diskretisierung von u im Feld NI gespeichert. In einer Zeile von NI stehen die Nummern der 6 Knoten eines Dreiecks der Diskretisierung von u. In NI($\cdot$,1) steht die Nummer des Knotens, der sich links unten im Dreieck befindet. Weiter werden zuerst die Eckknoten des Dreiecks und dann die Knoten auf den Seitenmittelpunkten entgegen der Uhrzeigerrichtung gespeichert, vgl. Abb. 5.9. KNOTNUM.FOR wird nur am Programmanfang aufgerufen.
Output : NI
Aufrufende Routine : EIT.FOR

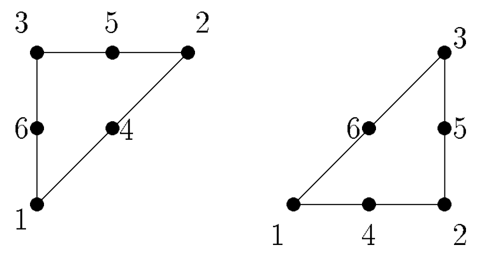


Abbildung 5.9: Speicherung der Knotennummern in NI

KORREK.FOR

In KORREK.FOR werden die aufdatierten Werte von U_{inn} und G gemäß (4.22) und (4.23) berechnet. Im Feld AINN befindet sich die obere Dreiecksmatrix der Cholesky-

Zerlegung von A_{inn}.

Output : G, Komponenten der inneren Knoten von U

Aufrufende Routine : EIT.FOR

Aufgerufene Routinen : DPBSL.FOR, DDOT.FOR

LEASQU.FOR

In der Subroutine LEASQU.FOR wird das Least-Square Problem (4.24) gelöst. Dazu wird die zweite Variante aus Kapitel 4.4 verwendet.

Output : DELGAM, Komponenten der Randknoten von U

Aufrufende Routine : EIT.FOR

Aufgerufene Routinen : DQRDC.FOR, DQRSL.FOR, DDOT.FOR

MATBERE.FOR

In MATBERE.FOR werden die Matrizen X1, $X2_i$, $X3_i$ und Y aus (4.17) berechnet. In AINN ist bereits der Dreiecksfaktor der Cholesky-Zerlegung von A_{inn} gespeichert.

Output : X1, X2, X3, Y

Aufrufende Routine : EIT.FOR

Aufgerufene Routinen : DREISYS.FOR, DDOT.FOR

RANDU.FOR

Die Subroutine RANDU.FOR dient zum Einlesen der gegebenen Randwerte von $U(.,i)_{rand}$, $i = 1(1)NMAXDAT$. Diese werden im Feld FSTRICH gespeichert. Diese Subroutine ist für eine konkrete Anwendung vom Nutzer zu erstellen. RANDU.FOR wird nur zum Programmstart aufgerufen.

Output : FSTRICH

Aufrufende Routine : EIT.FOR

REGULARI.FOR

In REGULARI.FOR werden die Gleichungen, die den Regularisierungsterm gemäß Kapitel 4.3 beschreiben, aufgestellt.
Output : X4, X5
Aufrufende Routine : EIT.FOR

S1BERE.FOR

In dieser Subroutine wird die Matrix S_1 gemäß Kapitel 3.2 berechnet.
Output : S1
Aufrufende Routine : ELEMAT.FOR

S2BERE.FOR

In dieser Subroutine wird die Matrix S_2 gemäß Kapitel 3.2 berechnet.
Output : S2
Aufrufende Routine : ELEMAT.FOR

S3BERE.FOR

In dieser Subroutine wird die Matrix S_3 gemäß Kapitel 3.2 berechnet.
Output : S3
Aufrufende Routine : ELEMAT.FOR

SEIBERE.FOR

In SEIBERE.FOR werden die Nichnullelemente der Matrizen $A(H_j)$ aus (4.16) berechnet. Das Ergebnis wird im Feld SE18 abgespeichert. Die Einträge in SE18 setzen sich aus den Einträgen der 8 Dreiecke zusammen, die von einem inneren Knoten der Diskretisierung von γ beeinflußt werden, vgl. Abb. 5.10. Da an den Randknoten weniger Dreiecke anliegen, werden die Werte der einzelnen 8 Dreiecke im Feld SEI gespeichert, damit in ANACHGAM.FOR die anliegenden Dreiecke ausgewählt und die zugehörigen Elementmatrizen mit $U(.,i)$ multipliziert werden können. Zur internen Rechnung sind die Dreieckstypen wie in Abb. 5.11 durchnumeriert worden.

Output : SEI, SE18, SEIKNOT

Aufrufende Routine : EIT.FOR

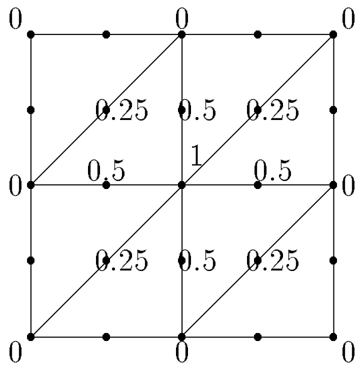


Abbildung 5.10: Zur Berechnung von SE18

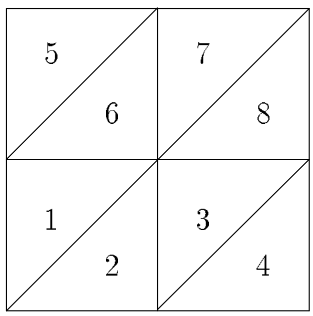


Abbildung 5.11: Interne Numerierung der Dreiecke

STARTW.FOR

In der Subroutine STARTW.FOR wird für eine gegebenes Feld GAMMA und gegebene Randwerte $U(.,i)_{rand}$ das Dirichletproblem gelöst. Anschließend wird, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, der Vektor der zugehörigen Neumanndaten berechnet. Diese Routine wird zur Berechnung der Neumanndaten $GSTRICH(.,i)$, $i = 1(1)NMAXDAT$, zu einer vorgegebenen Lösung GAMMA und zur Berechnung von Startwerten $U(.,i)_{inn}$ und $G(.,i)$ zu einer Startschätzung GAMMA verwendet. Bei beiden Aufrufen wird $U(.,i)_{rand}$ mit $FSTRICH(.,i)$ belegt, so daß beim Iterationsanfang $U(.,i)$ so gewählt ist, daß nur die Neumanndaten fehlerbehaftet sind. STARTW.FOR wird nur am Programmstart aufgerufen.
Output : U, G
Aufrufende Routine : EIT
Aufgerufene Routinen : ABERECH.FOR, DPBFA.FOR, DPBSL.FOR

5.2.3 Verwendete LINPACK - Routinen

Es werden hier nur diejenigen LINPACK - Routinen aufgeführt und ihre Funktionen kurz beschrieben, die direkt von den im Abschnitt 5.2.2 vorgestellten Routinen aufgerufen werden. Von den vorgestellten LINPACK - Routinen können andere, hier nicht aufgeführte LINPACK - Routinen aufgerufen werden.

DDOT.FOR

In DDOT.FOR wird das Skalarprodukt zweier Vektoren berechnet.
Aufrufende Routinen : ABWEICH.FOR, EIT.FOR, KORREK.FOR, LEASQU.FOR, MATBERE.FOR

DPBFA.FOR

In DPBFA.FOR wird die im Feld AINN gemäß Abb. 5.5 gespeicherte Matrix A_{inn} in ein Produkt

$$A_{inn} = R^T R$$

mittels Cholesky - Zerlegung faktorisiert. Das Ergebnis R wird wiederum im Feld AINN abgespeichert.
Aufrufende Routinen : EIT.FOR, STARTW.FOR

DPBSL.FOR

In der Routine DPBSL.FOR wird das Gleichungssystem

$$A_{inn} x = b$$

unter Benutzung der von DPBFA.FOR gelieferten Zerlegung der Matrix A_{inn} gelöst.
Aufrufende Routinen : STARTW.FOR, KORREK.FOR

DQRDC.FOR

Die Routine DQRDC.FOR berechnet die QR - Zerlegung einer Matrix mittels Householder - Spiegelungen.
Aufrufende Routine : LEASQU.FOR

DQRSL.FOR

DQRSL.FOR benutzt die von DQRDC.FOR berechnete QR - Zerlegung einer Matrix um Produkte der Gestalt Qb, $Q^T b$ zu berechnen und Quadratmittelprobleme der Gestalt

$$\min_x ||QRx - b||^2$$

zu lösen.
Aufrufende Routine : LEASQU.FOR

5.3 Programmbeschreibung gedämpftes Gauß - Newton Verfahren

Die Umsetzung des gedämpften Gauß - Newton Verfahrens gemäß Kapitel 4.5 basiert auf der Umsetzung des normalen Gauß - Newton Verfahrens nach Abschnitt 5.2. Es kommen lediglich die Subroutine DAEMPF.FOR und einige neue Größen dazu, der Aufruf der Subroutinen von EIT.FOR geschieht zudem in etwas geänderter Reihenfolge.

Größen für gedämpftes Gauß - Newton Verfahren

Die meisten der unten vorkommnenden Größen dienen der Durchführung des auf Seite 58 vorgestellten Algorithmus für ein gedämpftes Gauß - Newton Verfahren. Um diesen Algorithmus durchführen zu können, benötigt man Informationen vom Ausgangspunkt der k-ten Iteration und vom vorgeschlagenen Zielpunkt. Zusätzliche Größen über den Ausgangspunkt bekommen den Präfix oder Suffix "ALT", die über den Zielpunkt den Präfix oder Suffix "NEU".

ALPHA	α_k im Algorithmus Seite 58
DELTA	δ im Algorithmus Seite 58
GAMMAALT	ist GAMMA im Ausgangspunkt des k-ten Gauß - Newton Schrittes
INFO	Information über gedämpfte Gauß - Newton Korrektur, INFO = 1 - Korrektur angenommen, INFO = 2 - Korrektur abgelehnt und weitere Dämpfung
MJU	μ_k im Algorithmus Seite 58
MJU1	$\overline{\mu}_1$ im Algorithmus Seite 58
MJU2	$\overline{\mu}_2$ im Algorithmus Seite 58
NEBALT	Norm des Defektes der Nebenbedingungen (4.10) im Ausgangspunkt des Gauß - Newton Schrittes
NEUAINN	AINN im Zielpunkt des gedämpften Gauß - Newton Schrittes
NEUAUS	AAUS im Zielpunkt des gedämpften Gauß - Newton Schrittes

NEUNEB	enthält Nebenbedingungen (4.10) im Zielpunkt des gedämpften Gauß - Newton Schrittes
NEUSPA	SPAAUS im Zielpunkt des gedämpften Gauß - Newton Schrittes
NEUZEI	ZEIAUS im Zielpunkt des gedämpften Gauß - Newton Schrittes
RANDALT	Wurzel von RANDNORM im Ausgangspunkt des Gauß - Newton Schrittes
RANDNEU	Wurzel von RANDNORM im Zielpunkt des gedämpften Gauß - Newton Schrittes
THETA	θ im Algorithmus Seite 58

DAEMPF.FOR

In dieser Subroutine wird der Algorithmus von Seite 58 umgesetzt. Am Anfang des Dämpfungsprozesses wird INFO = 3 gesetzt. Falls INFO = 3 ist, werden die Schritte Sk1 und Sk2 abgearbeitet. Danach werden alle benötigten Werte im vorgeschlagenen neuen Iterationspunkt sowie die rechte und linke Seite des Dämpfungskriteriums von Sk4 berechnet. Ist das Kriterium erfüllt, so werden DELGAM und DELUAUS gedämpft, INFO = 2 gesetzt und die Größen am neuen vorgeschlagenen Iterationspunkt außerhalb der Routine DAEMPF.FOR berechnet. Anschließend wird DAEMPF.FOR erneut aufgerufen. Ist das Dämpfungskriterium nicht erfüllt, so ist keine Dämpfung notwendig. Die für den neuen Iterationspunkt bereits berechneten Größen werden an die Felder für den aktuellen Iterationspunkt übergeben und INFO = 1 gesetzt.
Output : INFO
Aufrufende Routine : EIT.FOR
Aufgerufene Routine : ABERECH.FOR

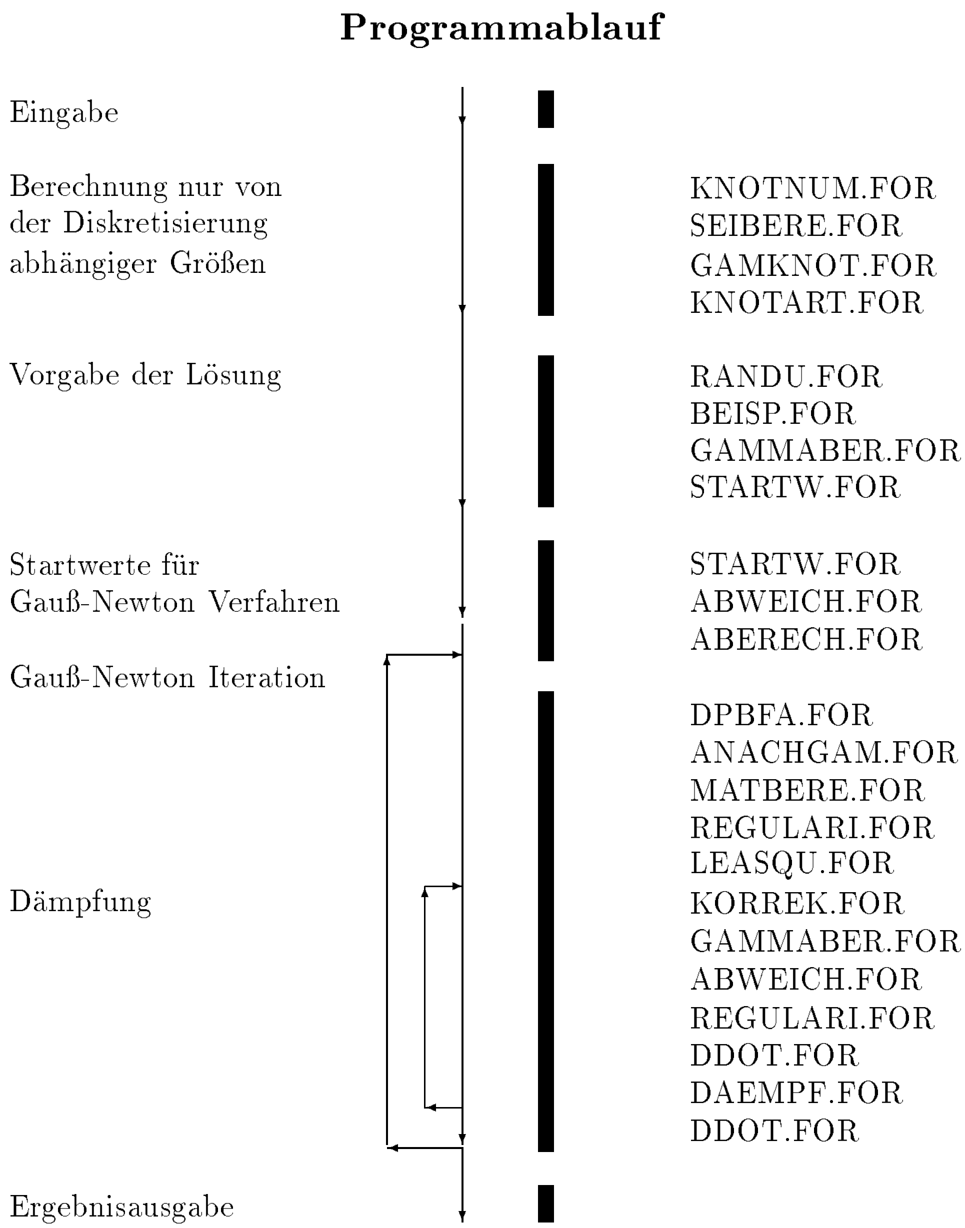


Abbildung 5.12: SCHEMA DES PROGRAMMABLAUFES

5.4 Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

Es wurde getestet, ob es bei feiner Diskretisierung effktiv ist, zuerst den Startwert GAMMA auf einem groben Gitter zu verbessern, das Ergebnis auf ein feineres Gitter zu interpolieren, auf diesem Gitter wieder das Gauß - Newton Verfahren anzuwenden, wieder zu verfeinern usw. bis man die gewünschte Gitterfeinheit erreicht hat. Beim Übergang von einem Gitter zum nächstfeineren werden die bisher berechneten Werte in die neuen Knoten linear interpoliert. Es liegen Programme sowohl für das ungedämpfte als auch das gedämpfte Gauß - Newton Verfahren vor. Der Programmablauf ist im wesentlichen wie in den Abbildungen 5.7 und 5.12. Neben den dort beschriebenen Routinen benötigt man einige Routinen, die die Steuerung der Interpolation vom groben auf ein feineres Gitter übernehmen. Aus Gründen der Einfachheit ist jeweils nur eine Verdoppelung der Gitterfeinheit, d.h. der Größe N, möglich. Auf jedem anderen als dem feinsten Gitter wird eine fest beschränkte Anzahl von Gauß - Newton Iterationen durchgeführt. Die Randdaten des feinsten Gitters sind in den Feldern FDACH und GDACH abgespeichert.

GAMFEIN.FOR

Beim Übergang von einem Gitter zum nächsten verändert sich die interne Numerierung der Knoten bezüglich GAMMA. Die Subroutine GAMFEIN.FOR steuert diese Änderung.
Output : GAMMA
Aufrufende Routine : EIT.FOR

GAMMABE1.FOR

Diese Subroutine erfüllt im wesentlichen die gleichen Aufgaben wie GAMMABER.FOR. Sie wird zur linearen Interpolation von GAMMA und U(.,i), i=1(1)NMAXDAT, verwendet. Der einzige Unterschied ist die Übergabe des Parameters INFO. Bei INFO = 1 wird ein Positivitätstest durchgeführt (notwendig bei GAMMA), bei INFO = 2 unterbleibt dieser Test.
Output : GAMMA

Aufrufende Routine : EIT.FOR

VERFEIN.FOR

Zu Beginn werden die Randdaten auf dem feinsten Gitter vorgegeben bzw. berechnet. In VERFEIN.FOR werden den Randknoten auf einem gröberen Gitter die zugehörigen Daten zugeordnet.
Output : FSTRICH, GSTRICH
Aufrufende Routine : EIT.FOR

5.5 Quelltexte

Die Quelltexte der in diesem Kapitel beschriebenen Verfahren befinden sich auf der beigelegten 5 1/4 " - Diskette. Im Verzeichnis EITUGNV befindet sich das ungedämpfte Gauß - Newton Verfahren, im Verzeichnis EITGGNV das gedämpfte Gauß - Newton Verfahren, im Verzeichnis EITSUGNV das ungedämpfte Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung und im Verzeichnis EITSGGNV das gedämpfte Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung.

5.6 Durchgeführte Testrechnungen

Die Tests wurden auf einer Workstation IBM RISC 600, Model 520, durchgeführt.

Wie bereits erwähnt, wurde mit synthetischen Daten gerechnet. Es wurden eine Lösung γ und Dirichletdaten $u_{i,aus}$, $i = 1(1)S$, vorgegeben, diese diskretisiert, die zugehörigen diskreten Neumanndaten berechnet und aus den nun vorhandenen Paaren von diskreten Dirichlet- und Neumanndaten versucht, die diskretisierte Lösung GAMMA zu rekonstruieren.

Als Startschätzung für GAMMA wurde in jedem Test GAMMA(i) = 1.0 , $\forall i$, gewählt. Das Verfahren brach ab, wenn entweder eine maximale Anzahl von Iterationsschritten erreicht oder die Korrektur DELGAM genügend klein war. Als maximale Iterationsanzahl wurde jeweils MAXSTEP = 50 gewählt. Das Abbruchkriterium für eine hinreichend kleine Korrektur DELGAM lautete

$$||DELGAM||^2 = DELGNORM \leq TOL * NMAXGAM.$$

Die Größe TOL kann am Anfang des Programmes vorgegeben werden, es wurde jeweils 10^{-10} gewählt. Es ist sicher nicht sinnvoll, den Wert des Fehlerfunktionals (4.9) als Abbruchkriterium zu wählen, da a-priori darüber nichts ausgesagt werden kann. Nach wenigen Schritten war das Verfahren in einer sehr kleinen Umgebung des Minimums von (4.9). Es benötigte aber einige Schritte mehr, damit die Korrektur von GAMMA so klein wurde, daß abgebrochen wurde.

Zuerst wurden Tests mit ungestörten Randdaten und ohne Regularisierung gerechnet, in den Tabellen 5.2 bis 5.19 die Tests mit dem Wert 0 in den Spalten "RUND" und "regu". Der Wert von (4.9) ist im Lösungspunkt 0 und das Gauß - Newton Verfahren ist bei Konvergenz lokal quadratisch konvergent. Bei einer konstanten Anzahl von Datensätzen NMAXDAT = 4 wurde festgestellt, daß mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung von u und γ, d.h. mit zunehmender Anzahl der zu berechnenden Komponenten von GAMMA, die Startwerte von GAMMA für das Gauß - Newton

Verfahren immer genauer sein müssen, um im Konvergenzbereich des Verfahrens zu liegen. Mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung beschränkt sich der Bereich der quadratischen Konvergenz bei den gewählten Abbruchkriterien auf den letzten Iterationsschritt oder wird gar nicht erreicht. Falls das Verfahren konvergiert, wird die vorgegebene Lösung sehr genau rekonstruiert.

Eine Möglichkeit bei feiner Diskretisierung und ungestörten Randdaten eine sichere Konvergenz des Gauß - Newton Verfahrens zu erreichen, ist die Einführung des Regularisierungstermes, d.h. die Spalte "regu" hat einen Wert größer als Null. Der Einfluß der Regularisierung wird durch den Parameter REGUPAR bestimmt. REGUPAR wurde entweder 10^{-3} oder 10^{-4} gewählt. Es ist festzustellen, daß die Wahl eines größeren Parameters die Konvergenzgeschwindigkeit positiv beeinflußt, allerdings werden die Störungen im Ergebnis auch größer. Zur Konvergenz war bei den durchgeführten Tests die Wahl von REGUPAR=10^{-4} immer ausreichend. Da der Wert des Funktionals (4.24) nun i.a. nicht mehr Null werden kann, ist keine lokale quadratische Konvergenz mehr möglich.

Desweiteren wurde der Einfluß von gestörten Randdaten auf das Verhalten des Algorithmus untersucht. Man kann sich vielerlei Arten von Störungen vorstellen. Für unsere Tests wurden die Randdaten, d.h. sowohl die FTILDE als auch die GTILDE einfach auf RUND Stellen nach dem Komma gerundet. Auch in diesem Fall wird der Wert des Funktionals (4.24), ob nun mit oder ohne Regularisierung, i.a. nicht Null werden können und das Gauß - Newton Verfahren im Konvergenzfall q-linear konvergieren. Bei Tests mit gestörten Randdaten, wenig Datensätzen, selbst grober Diskretisierung aber ohne Regularisierung ist das Verfahren nicht konvergent, vgl. Tabellen 5.2, 5.14, 5.17 jeweils Test 2. Mehr Sätze von Randdaten, also mehr Informationen können auch ohne Regularisierung zur Konvergenz des Verfahrens führen, Tabellen 5.14, 5.17 jeweils Test 5. Bei gestörten Daten ist es jedoch ohnehin vernünftig und eigentlich notwendig mit Regularisierung zu rechnen. Der Regularisierungsparameter REGUPAR wurde i.a. aus der Menge $\{10^{-3}, 10^{-4}\}$ gewählt. Mit dieser Wahl wurde bei den durchgeführten

Tests durchweg eine Konvergenz des Verfahrens erzielt.

Eine andere Art von Störungen wurde dadurch erzeugt, daß die Randdaten FTILDE und GTILDE auf einem feinen Gitter vorgegeben bzw. berechnet wurden, diese dann nicht gestört wurden, aber GAMMA auf einem gröberen Gitter rekonstruiert wurde. Graphische Ergebnisse zweier Testbeispiele bei einer Regularisierung von $REGUPAR = 10^{-3}$ sind auf Seite 122 zu sehen.

Schließlich wurde mit unterbestimmten Daten gerechnet, d.h. daß die Gleichungen im Quadratmittelproblem (4.24) weniger sind, als die Komponenten des Lösungsvektors. In diesen Fällen muß regularisiert werden und Regularisierungsgleichungen müssen fehlende Informationen ersetzen. In den Tabellen 5.2 bis 5.19 sind die Beispiele mit unterbestimmten Daten durch "Kn.γ" $<$ "Gln.Dis" gekennzeichnet. Mit der Wahl REGUPAR $= 10^{-3}$ wurde durchweg Konvergenz erzielt.

Neben dem ungedämpften Gauß - Newton Verfahren wurde auch das gedämpfte Verfahren nach Abschnitt 4.5 auf die meisten Testbeispiele angewandt. Bei den Tests, die mit dem ungedämpften Verfahren problemlos konvergierten, wurde auch bei Anwendung des gedämften Gauß - Newton Verfahrens keine Dämpfung durchgeführt. Einige Beispiele, bei denen das ungedämpfte Verfahren divergierte, konnten mit der Dämpfung berechnet werden (Tab.5.4 Test 2, Tab.5.16 Test 2). Teilweise brach das gedämpfte Gauß - Newton Verfahren wegen zu starker Dämpfung ab (Tab.5.10 Test 2, Tab.5.19 Test 2). Bei diesen Tests wurde trotz gestörter Daten aber zu wenig oder gar nicht regularisiert. Vielleicht ist dieser Effekt auch mit anderen als den gewählten Dämpfungsparametern zu verhindern.

Das Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung hat nur im Beispiel 6 spürbar schnellere Konvergenz gebracht, Tabelle 5.18.

In Tabelle 5.1 sind die durchschnittlichen benötigten CPU - Zeiten pro Iteration bei gewissen Vorgaben der einzigen beiden unabhängigen Programmparameter N und NMAXDAT angegeben :

Bei NMAXDAT $= 4$ verhält sich die Zeit etwa wie cN^4 mit $c \approx 500$. Eine Vervier-

N	NMAXDAT	CPU-Zeit in min
4	4	0:00,8
6	1	0:01,5
6	4	0:03
8	1	0:04,6
8	2	0:06
8	4	0:08,5
10	4	0:20
13	4	0:54
16	4	2:07
20	4	5:29

Tabelle 5.1: CPU - Zeit pro Iteration

fachung der Datensätze zieht ungefähr eine Verdopplung der Zeit pro Iteration nach sich.

Die meiste Zeit benötigt die in Abschnitt 4.4 beschriebene Lösung des linearen Quadratmittelproblems (4.24). Wir wollen die Schätzungen des Aufwandes der beiden vorgestellten Methoden zur Lösung dieses Quadratmittelproblems (4.33) und (4.35) für die von uns gewählten Beispiele konkretisieren. Bei den gewählten Testbeispielen gilt $M = (N+1)^2$, $K = 8N$, $R = 2N(N+1)$ und $S = NMAXDAT$. Damit ist der Aufwand der ersten Methode

$$(5.2) \sim \frac{5}{3}N^6 + 8(5NMAXDAT + 1)N^5 + (320NMAXDAT^2 + 128NMAXDAT + 15)N^4 \text{ opms}$$

und der der zweiten Methode

$$(5.3) \qquad \sim \frac{5}{3}N^6 + 8(NMAXDAT + 1)N^5 + (160NMAXDAT + 15)N^4 \text{ opms.}$$

Die zweite Variante ist also etwas billiger als die erste, in der höchsten Potenz ist der Aufwand allerdings gleich. Für N=10 und NMAXDAT=4 kostet die Lösung des linearen Quadratmittelproblems (4.24) mit der zweiten Methode

$$\sim 1.2 \cdot 10^7 \text{ opms},$$

für N=20 und NMAXDAT=4

$$\sim 3.7 \cdot 10^8 \text{ opms}.$$

5.7 Auswertung der Testrechnungen

Das vorgestellte Verfahren hat sich unter vernünftigen Voraussetzungen (Regularisierung) bei allen Testbeispielen als konvergent erwiesen. Bei einem Startwert, der keine a-priori Informationen über die gesuchte Lösung enthält, wurden oft nur wenige Iterationen benötigt, um das recht harte Abbruchkriterium zu erfüllen. Das Abbruchkriterium besagte, daß die Komponenten von GAMMA bei einem Gauß - Newton Schritt höchstens noch in der 5. oder 6. Nachkommastelle verändert werden dürfen. Für eine sehr gute graphische Vorstellung der Lösung reicht aber bereits eine genaue Nachkommastelle aus. Auf den Seiten 116 bis 121 ist zu sehen, daß bei zwei Testbeispielen bereits nach 5 Iterationen eine fast identische graphische Darstellung wie zum Iterationsabbruch nach 17 bzw. 18 Iterationen erreicht ist. Aus diesem Grunde ist es bei praktischen Rechnungen sicher sinnvoll, die Größe TOL beim Abbruchkriterium nur etwa 10^{-4} statt 10^{-10} zu setzen. Damit würden die konvergenten Testbeispiele i.a. nach etwa einem Drittel bis der Hälfte der in den Tabellen 5.2 bis 5.19 angegebenen Iterationen und Zeiten abbrechen.

Liegen Störungen der Randdaten vor, die von der Größenordnung im Bereich der Werte von GAMMA sind, hier RUND = 1, d.h. Rundung der Randdaten auf eine Nachkommastelle, so weicht das berechnete Ergebnis von GAMMA am Rand stark von den vorgegebenen Werten ab. Das ist allerdings nicht verwunderlich, da die Neumanndaten im wesentlichen ein Produkt der von den Randwerten von GAMMA abhängigen Matrix A_{rand} und der Dirichletdaten sind. Weit wichtiger als die Verzerrungen von

GAMMA am Rand ist aber, daß die Werte von GAMMA in den inneren Knoten recht gut rekonstruiert werden. So sind "Berge" und "Senken" deutlich zu erkennen. Die unzuverlässigen Randdaten von GAMMA wird man in der Praxis oft dadurch ersetzen können, daß das Randmaterial eines untersuchten Körpers und damit die Leitfähigkeit am Rand a-priori bekannt ist.

Das gedämpfte Gauß - Newton Verfahren hat bei hinreichend regularisierten Testbeispielen keine Veränderung des Iterationsablaufes gebracht. Die sukzessive Gitterverfeinerung hat zwar bei einigen Beispielen schneller konvergiert als das ungedämpfte Gauß - Newton Verfahren, aber i.a. keine wesentliche Verbesserung gebracht. Bei diesen Verfahren gibt es jedoch viele Variationsmöglichkeiten (Wahl von Parametern), die noch getestet werden könnten und die vielleicht zur besseren Ergebnissen führen.

Die Anzahl der Iterationsschritte scheint wesentlich von der Variation der gesuchten Lösung GAMMA, also von der Differenz des größten mit dem kleinsten Wertes, abzuhängen. Die Wahl des Regularisierungsparameters REGUPAR $= 10^{-3}$ erwies sich immer als hinreichend für eine schnelle Konvergenz und auch für ein gutes graphisches Ergebnis.

Nachteile des vorgestellten Verfahrens sind der hohe Speicherbedarf (keine Anwendung auf PC möglich) und der stark wachsende Aufwand pro Iterationsschritt mit wachsendem N.

5.8 Vorstellung einiger Testergebnisse

In diesem Kapitel werden einige Testergebnisse vorgestellt. In den Tabellen 5.2 bis 5.19 sind Eingabedaten, Abbruchdaten und die benötigte CPU-Zeit aufgelistet. Danach erfolgt eine graphische Darstellung ausgewählter Testbeispiele. Besonders diese geben von den Ergebnissen und vom Verhalten des Algorithmus einen sehr guten Eindruck. Zum Schluß wird das Verhalten der Größen RANDNORM und DELGNORM an ausgewählten Beispielen dargestellt.

Spalten der Tabellen 5.2 - 5.19

Ds	Anzahl der verwendeten Datensätze, NMAXDAT
Dis	Feinheit der Diskretisierung, N
RUND	Wert von RUND
Regu	Regulariserungsparameter, REGUPAR
Kn.γ	Anzahl der Knoten der Diskretisierung von γ, NMAXGAM
Gln.Dis	Anzahl der Gleichungen in (4.34), die sich aus den Informationen der Randdaten und der Diskretisierung ergeben
Gln.Regu	Gesamtanzahl der Gleichungen in (4.34), d.h. Gleichungen aus den Informationen der Randdaten und Gleichungen aus Regularisierung
Ite.	benötigte Iterationen; beim ungedämpften Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung nur Iterationen auf dem feinsten Gitter
DELGAM	Wert von DELGAM beim Iterationsabbruch
(4.9)	Wert des Ausdrucks (4.9) beim Iterationsabbruch
Dä	Dämpfung, angewandt = "+", nicht angewandt = "-"
Zeit min	benötigte CPU - Zeit in Minuten

Beispiel 1
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	1	4	0	0	25	32	32	2	10^{-28}	10^{-24}	0:01
2	1	4	2	0	25	32	32	-	div	-	-
3	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	6	10^{-11}	10^{-4}	0:02
4	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	10	10^{-9}	10^{-4}	0:04
5	4	4	2	0	25	128	128	5	10^{-10}	10^{-4}	0:04
6	1	6	0	10^{-4}	49	48	132	2	10^{-25}	10^{-27}	0:03
7	4	6	0	0	49	192	192	2	10^{-25}	10^{-27}	0:06
8	1	8	1	10^{-3}	81	64	208	9	10^{-10}	10^{-3}	0:41
9	2	8	1	10^{-3}	81	128	272	10	10^{-10}	10^{-3}	0:59
10	4	8	0	0	81	256	256	2	10^{-27}	10^{-23}	0:18
11	4	10	0	0	121	320	320	2	10^{-26}	10^{-20}	0:41
12	4	10	0	10^{-3}	121	320	540	2	10^{-26}	10^{-26}	0:41
13	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	2	10^{-24}	10^{-25}	4:02
14	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	9	10^{-10}	10^{-2}	19:11
15	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	5	10^{-12}	10^{-4}	27:26

Tabelle 5.2:

Beispiel 1
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	3	10^{-9}	10^{-25}	6:56
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	8	10^{-9}	10^{-2}	17:21

Tabelle 5.3:

Beispiel 1

gedämpftes Gauß - Newton Verfahren , $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$, $\theta = 0.5$, $\delta = 10^{-4}$

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Dä	Zeit min
1	1	4	0	0	25	32	32	2	10^{-14}	10^{-24}	-	0:01
2	1	4	2	0	25	32	32	8	10^{-10}	10^{-1}	+	0:04
3	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	6	10^{-11}	10^{-4}	-	0:02
4	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	10	10^{-9}	10^{-4}	-	0:04
5	1	6	0	10^{-4}	49	48	132	2	10^{-25}	10^{-14}	-	0:03
6	4	6	0	0	49	192	192	2	10^{-25}	10^{-27}	-	0:06
7	1	8	1	10^{-3}	81	64	208	9	10^{-10}	10^{-3}	-	0:43
8	2	8	1	10^{-3}	81	128	272	10	10^{-10}	10^{-3}	-	0:61
9	4	10	0	10^{-4}	121	320	540	2	10^{-24}	10^{-26}	-	0:43
10	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	2	10^{-24}	10^{-26}	-	4:03
11	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	9	10^{-10}	10^{-2}	-	19:12
12	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	5	10^{-11}	10^{-4}	-	27:55

Tabelle 5.4:

Beispiel 2

ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	6	10^{-10}	10^{-5}	0:02
2	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	5	10^{-9}	10^{-9}	10:41
3	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	12	10^{-9}	10^{-2}	25:41
4	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	5	10^{-10}	10^{-5}	27:17

Tabelle 5.5:

Beispiel 2

ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	5	10^{-9}	10^{-12}	11:06
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	12	10^{-9}	10^{-2}	25:42

Tabelle 5.6:

Beispiel 2

gedämpftes Gauß - Newton Verfahren, $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$, $\theta = 0.5$, $\delta = 10^{-4}$

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Dä	Zeit min
1	1	4	2	0	25	32	32	9	10^{-8}	10^{-1}	+	0:04
2	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	6	10^{-10}	10^{-5}	-	0:02
3	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	25	10^{-9}	10^{-5}	+	0:09
4	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	5	10^{-9}	10^{-6}	-	10:50
5	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	12	10^{-9}	10^{-2}	-	25:50
6	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	5	10^{-10}	10^{-4}	-	27:49

Tabelle 5.7:

Beispiel 3

ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit in s
1	4	13	3	10^{-3}	196	416	780	9	10^{-9}	10^{-4}	8:12
2	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	17	10^{-8}	10^{-6}	36:06
3	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	16	10^{-8}	10^{-2}	34:08
4	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	8	10^{-8}	10^{-3}	43:42

Tabelle 5.8:

Beispiel 3

ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	16	10^{-8}	10^{-6}	34:02
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	15	10^{-8}	10^{-2}	31:57

Tabelle 5.9:

Beispiel 3

gedämpftes Gauß - Newton Verfahren, $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$, $\theta = 0.5$, $\delta = 10^{-4}$

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Dä	Zeit in s
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	18	10^{-8}	10^{-5}	-	38:31
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	16	10^{-8}	10^{-2}	-	34:49
3	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	8	10^{-8}	10^{-3}	-	43:38

Tabelle 5.10:

Beispiel 4
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit in s
1	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	50	10^{-7}	10^{-5}	19
2	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	8	10^{-9}	10^{-6}	17:02
3	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	10	10^{-9}	10^{-2}	21:22
4	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	6	10^{-9}	10^{-3}	32:57

Tabelle 5.11:

Test 1 : Abbruch wegen Erreichen der maximalen Iterationsanzahl, aber konvergent

Beispiel 4
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	7	10^{-9}	10^{-6}	15:16
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	10	10^{-9}	10^{-2}	21:31

Tabelle 5.12:

Beispiel 4
gedämpftes Gauß - Newton Verfahren, $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$, $\theta = 0.5$, $\delta = 10^{-4}$

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Dä	Zeit in s
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	8	10^{-9}	10^{-5}	-	16:59
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	3	10^{-62}	2.22	+	7:16
3	4	16	1	10^{-2}	289	512	1056	6	10^{-8}	10^{-1}	-	12:56
4	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	6	10^{-8}	10^{-3}	-	33:25

Tabelle 5.13:

Test 2 : Abbruch wegen zu starker Dämpfung

Beispiel 5
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	1	4	0	0	25	32	32	4	10^{-11}	10^{-28}	0:01
2	1	4	2	0	25	32	32	-	div	-	-
3	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	7	10^{-10}	10^{-5}	0:03
4	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	31	10^{-9}	10^{-5}	0:12
5	4	4	2	0	25	128	128	5	10^{-9}	10^{-4}	0:04
6	1	6	0	10^{-4}	49	48	132	6	10^{-9}	10^{-7}	0:09
7	4	6	0	0	49	192	192	5	10^{-18}	10^{-27}	0:15
8	4	8	0	0	81	256	256	8	10^{-16}	10^{-27}	1:09
9	4	10	0	0	121	320	320	14	10^{-11}	10^{-26}	4:36
10	4	10	0	10^{-3}	121	320	540	5	10^{-9}	10^{-5}	1:39
11	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	5	10^{-9}	10^{-8}	10:45
12	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	10	10^{-9}	10^{-2}	21:11
13	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	6	10^{-10}	10^{-4}	33:06

Tabelle 5.14:

Beispiel 5
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	4	10^{-9}	10^{-8}	9:01
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	10	10^{-9}	10^{-2}	21:32

Tabelle 5.15:

Beispiel 5

gedämpftes Gauß - Newton Verfahren, $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$, $\theta = 0.5$, $\delta = 10^{-4}$

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Dä	Zeit min
1	1	4	0	0	25	32	32	4	10^{-11}	10^{-28}	-	0:02
2	1	4	2	0	25	32	32	14	10^{-9}	10^{-5}	+	0:07
3	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	7	10^{-10}	10^{-5}	-	0:03
4	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	28	10^{-9}	10^{-5}	+	0:11
5	1	6	0	10^{-4}	49	48	132	6	10^{-9}	10^{-7}	-	0:09
6	4	6	0	0	49	192	192	5	10^{-18}	10^{-27}	-	0:17
7	1	8	1	10^{-3}	81	64	208	17	10^{-9}	10^{-4}	-	1:19
8	2	8	1	10^{-3}	81	128	272	14	10^{-9}	10^{-4}	-	1:25
9	4	10	0	10^{-4}	121	320	540	14	10^{-11}	10^{-26}	-	4:47
10	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	5	10^{-9}	10^{-8}	-	10:48
11	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	10	10^{-9}	10^{-2}	-	21:24
12	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	6	10^{-10}	10^{-4}	-	33:00

Tabelle 5.16:

Test 4 : Dämpfung nur in den letzten beiden Iterationen

Beispiel 6
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	1	4	0	0	25	32	32	6	10^{-14}	10^{-28}	0:02
2	1	4	2	0	25	32	32	-	div	-	-
3	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	7	10^{-10}	10^{-5}	0:03
4	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	14	10^{-9}	10^{-5}	0:05
5	4	4	2	0	25	128	128	7	10^{-11}	10^{-4}	0:06
6	4	4	0	0	25	128	128	5	10^{-15}	10^{-28}	0:04
7	1	6	0	10^{-4}	49	48	132	18	10^{-9}	10^{-7}	0:28
8	4	6	0	0	49	192	192	6	10^{-11}	10^{-27}	0:19
9	4	8	0	0	81	256	256	10	10^{-9}	10^{-26}	1:25
10	4	10	0	0	121	320	320	24	10^{-9}	10^{-26}	8:58
11	4	10	0	10^{-3}	121	320	540	7	10^{-9}	10^{-4}	2:23
12	4	10	1	10^{-3}	121	320	540	15	10^{-9}	10^{-2}	4:58
13	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	17	10^{-8}	10^{-6}	35:51
14	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	18	10^{-8}	10^{-2}	38:05
15	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	10	10^{-8}	10^{-3}	54:13

Tabelle 5.17:

Test 9 : Am Anfang große Korrekturschritte in unterschiedliche Richtungen, dann aber doch Konvergenz

Beispiel 6
ungedämpftes Gauß - Newton Verfahren mit sukzessiver Gitterverfeinerung

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Zeit min
1	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	13	10^{-8}	10^{-9}	28:03
2	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	15	10^{-8}	10^{-2}	32:04

Tabelle 5.18:

Beispiel 6

gedämpftes Gauß - Newton Verfahren, $\overline{\mu}_1 = 1$, $\overline{\mu}_2 = 2$, $\theta = 0.5$, $\delta = 10^{-4}$

	Ds	Dis	RUND	Regu	Kn.γ	Gln. Dis	Gln. Regu	Ite.	DELGAM	(4.9)	Dä	Zeit min
1	1	4	0	0	25	32	32	6	10^{-14}	10^{-28}	-	0:02
2	1	4	2	0	25	32	32	4	10^{-60}	10^{-1}	+	0:03
3	1	4	2	10^{-3}	25	32	72	7	10^{-10}	10^{-4}	-	0:03
4	1	4	2	10^{-4}	25	32	72	14	10^{-9}	10^{-5}	-	0:05
5	1	6	0	10^{-4}	49	48	132	18	10^{-9}	10^{-7}	-	0:29
6	4	6	0	0	49	192	192	6	10^{-11}	10^{-27}	-	0:19
7	1	8	1	10^{-3}	81	64	208	10	10^{-9}	10^{-3}	-	0:47
8	2	8	1	10^{-3}	81	128	272	9	10^{-9}	10^{-3}	-	0:55
9	4	8	1	10^{-3}	81	256	400	12	10^{-10}	10^{-2}	+	1:46
10	4	10	0	10^{-4}	121	320	540	11	10^{-8}	10^{-5}	-	3:46
11	4	10	0	0	121	320	320	50	10^{-3}	684	+	17:15
12	4	16	0	10^{-4}	289	512	1056	17	10^{-8}	10^{-5}	-	36:32
13	4	16	1	10^{-3}	289	512	1056	18	10^{-8}	10^{-2}	-	38:19
14	4	20	2	10^{-3}	441	640	1480	10	10^{-8}	10^{-3}	-	55:29

Tabelle 5.19:

Test 2 : Abbruch wegen zu starker Dämpfung

Test 9 : Dämpfung nur im letzten Iterationsschritt

Test 11 : Abbruch wegen maximaler Iterationsanzahl, wenig Veränderung des Startwertes

Graphische Darstellung einiger Ergebnisse

Es werden die Ergebnisse einiger Tests und desweiteren das Verhalten während der Iteration an zwei Testbeispielen graphisch dargestellt.

Beispiel 6, Tab.5.17.13

Beispiel 6, Tab.5.17.14

Verhalten von RANDNORM und DELGNORM während der Iteration

Beispiel 6, Tab.5.17.8

STEP	RANDNORM	DELGNORM
0	417.405607034509956	
1	$0.291671558397039749E-02$	66.9030369577702402
2	$0.114061966917104676E-04$	7.19951477061447775
3	$0.546568166508646614E-07$	0.819701811363631072
4	$0.208969970040164710E-10$	$0.339517043225715659E-01$
5	$0.243561508513667208E-16$	$0.345462103225707245E-04$
6	$0.407478036662542649E-26$	$0.180040918415001353E-10$

Beispiel 6, Tab.5.17.13

STEP	RANDNORM	DELGNORM
0	1068.31380097643500	
1	$0.129255632647281987E-01$	370.630548451781010
2	$0.727572771840053303E-04$	22.0165110157277724
3	$0.112034434273200271E-04$	10.3861817809021932
4	$0.331841018846622003E-05$	1.55040080725283835
5	$0.317511448782887810E-05$	0.223851853294544434
6	$0.319731377906647131E-05$	$0.434045456498078699E-01$
7	$0.322052428623815911E-05$	$0.100752466277177870E-01$
8	$0.322616154254583371E-05$	$0.243602471641746979E-02$
9	$0.323079356786601422E-05$	$0.602126845012025441E-03$
10	$0.323159940956054902E-05$	$0.150646544984745721E-03$
11	$0.323246819982608108E-05$	$0.378306084731888287E-04$
12	$0.323258221790766987E-05$	$0.955488767585280639E-05$
13	$0.323275418237231525E-05$	$0.241668896837002199E-05$
14	$0.323276795271206798E-05$	$0.613440352752630145E-06$
15	$0.323280361699855463E-05$	$0.155800737410361634E-06$
16	$0.323280441705044761E-05$	$0.396714244715207965E-07$
17	$0.323281208761363948E-05$	$0.101019685973457279E-07$

Beispiel 6, Tab.5.17.14

STEP	RANDNORM	DELGNORM
0	1787.01445521619462	
1	0.155379638359356698	373.031064585967613
2	$0.431746664014244427E-01$	104.993767590842381
3	$0.578527822841143347E-01$	15.0878610999379106
4	$0.574673906057676515E-01$	1.72881204581882897
5	$0.575597712063199707E-01$	0.226405096498949687
6	$0.574872097119600509E-01$	$0.529159730116665339E-01$
7	$0.574912042723916966E-01$	$0.131540584319673366E-01$
8	$0.574734636687927944E-01$	$0.373552977605696914E-02$
9	$0.574740232632562006E-01$	$0.101427480228015020E-02$
10	$0.574695166675650293E-01$	$0.295104957230696860E-03$
11	$0.574695626442000562E-01$	$0.819622870503132733E-04$
12	$0.574683193279849971E-01$	$0.240906856180252862E-04$
13	$0.574682871643784274E-01$	$0.677845701394160948E-05$
14	$0.574679266498331134E-01$	$0.201675541089003314E-05$
15	$0.574679012530609143E-01$	$0.574718445994818569E-06$
16	$0.574677938064208568E-01$	$0.173509236412765539E-06$
17	$0.574677811617161083E-01$	$0.501454477660844539E-07$
18	$0.574677486110688751E-01$	$0.153779843139414877E-07$

Beispiel 6, Tab.5.17.15

STEP	RANDNORM	DELGNORM
0	1322.51829001085684	
1	$0.300600836504347421E-01$	515.702358951676047
2	$0.154815338170130991E-02$	12.7522077287099602
3	$0.154174904435587794E-02$	0.952324714250407878
4	$0.155709713458184384E-02$	$0.857655986288449572E-02$
5	$0.155215405904673281E-02$	$0.397241158548515246E-03$
6	$0.155177146009167371E-02$	$0.415367140607539564E-04$
7	$0.155149240856898313E-02$	$0.526580415687993667E-05$
8	$0.155143182354430679E-02$	$0.708754045561641130E-06$
9	$0.155140519350079379E-02$	$0.971103071360517449E-07$
10	$0.155139718936357141E-02$	$0.133811714664233833E-07$

Literaturverzeichnis

[Ale88] G. Alessandrini. Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Appl. Anal.*, 27:153–172, 1988.

[BK89] H.T. Banks and K. Kunisch. *Estimation Techniques for Distributed Parameter Systems.* Birkhäuser, 1989.

[BMW] A. Brandt, S. McCormick, and G. Wade. Multilevel parameter estimation.

[Cal80] A.P. Calderon. On an inverse boundary value problem. *Seminar on Numerical Analysis and its Application to Continuum Physics,Soc. Brasileira de Matematica, Rio de Janeiro*, pages 65–73, 1980.

[CI90] M. Cheney and D. Isaacson. Layer-stripping, invariant imbedding, and impedance imaging. In *Conference Proceedings for AMS Special Session in memory of Bob Krueger*, Albuquerque,NM, 1990.

[CIN+90] M. Cheney, D. Issacson, J.C. Newell, S. Simske, and J. Goble. Noser: An algorithm for solving the inverse conductivity problem. *International Journal of Imaging Systems and Technology*, 2:66–75, 1990.

[CIS+91] M. Cheney, D. Isaacson, E. Somersalo, E.L. Isaacson, and E.J. Coffey. A layer stripping reconstruction for impedance imaging. unpublished, 1991.

[CISI91] M. Cheney, D. Issacson, E. Somersalo, and E.L. Isaacson. A layer-stripping approach to impedance imaging. In *7th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics*, Naval Postgraduate School, 1991.

[Dob90] D.C. Dobson. *Stability and Regularity of an Inverse Elliptic Boundary Value Problem.* PhD thesis, Rice University Houston, Texas, 1990.

[GRT85] H. Goering, H.-G. Roos, and L. Tobiska. *Finite - Elemente - Methode.* Akademie-Verlag, 1985.

[Isa88] V. Isakov. On uniqueness of recovery of a discontinuous conductivity coefficient. *Comm. Pure. Appl. Math.*, 41:865–877, 1988.

[Jia90] X. Jiang. *Augmented Lagrangian Method for Impedance Computed Tomography.* PhD thesis, Brown University, 1990.

[KM90] R. Kohn and A. McKenney. Numerical implementation of a variational method for electrical impedance tomography. *Inverse Problems*, 6:389–414, 1990.

[Kno89] O. Knoth. A globalization scheme for the generalized gauss-newton-method. *Numer. Math.*, 56, 1989.

[KS88] A. Kielbasinski and H. Schwetlick. *Numerische lineare Algebra.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1988.

[KV84a] R. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements. *Comm. Pure Appl. Math.*, 37:289–298, 1984.

[KV84b] R. Kohn and M. Vogelius. Identification of an unknown conductivity by means of measurments at the boundary. *SIAM-AMS Proceedings*, 14:113–123, 1984.

[KV85] R. Kohn and M. Vogelius. Determining conductivity by boundary measurements ii. interior results. *Comm. Pure Appl. Math.*, 38:644–667, 1985.

[Nac88] A. Nachman. Reconstructions from boundary measurements. *Annals of Math.*, 128:595–605, 1988.

[NJU88] A. Nachman, J. Sylvester J., and G. Uhlmann. An n-dimensional borg-levison theorem. *Comm. Math. Physics*, 115:595–605, 1988.

[Sch84] H.R. Schwarz. *Methode der finiten Elemente.* B.G.Teubner, zweite edition, 1984.

[Sch91] S. Schleiff. Ein Parameterschätzproblem für nichtlineare Gleichungen mit Rückkehrpunkten, 1991.

[SU] J. Sylvester and G. Uhlmann. Inverse boundary value problems.

[SU86] J. Sylvester and G. Uhlmann. A uniqueness theorem for an inverse boundary value problem in electrical prospection. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39:430–441, 1986.

[SU87] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math.*, 125:153–69, 1987.

[Sun89] Z. Sun. On an inverse boundary value problem in two dimensions. *Comm. PDE*, 14:1101–1113, 1989.

[Tri72] H. Triebel. *Höhere Analysis.* Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[Web90] J. G. Webster, editor. *Electrical Impedance Tomography.* Adam Hilger, 1990.

[WFN85] A. Wexler, B. Fry, and M. Neuman. Impedance-computed tomography algorithm and system. *Appl. Opt.*, 24:3985–92, 1985.

[Wla72] W. S. Wladimirow. *Gleichungen der mathematischen Physik*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.

[YWT87] T. Yorkey, J. Webster, and W. Tompkins. Comparing reconstruction algorithms for electrical impedance tomography. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, BME-34:843–52, 1987.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit erkläre ich an Eides statt, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig und nur mit den angegebenen Hilfsmitteln erstellt habe.

Halle/Saale im August 1992