

# Kapitel 11

## Interpolation

Die variationelle Formulierung der partiellen Differentialgleichungen, die wir betrachten, benutzt Funktionen aus Sobolev-Räumen. Wir wollen die Lösung mit Hilfe der Ritzschen Methode und endlich-dimensionaler Finite-Element-Räume approximieren. Der Fehler in der durch den Raum  $V$  induzierten Norm hängt davon ab, wie gut man Funktionen aus Sobolev-Räumen überhaupt mit Funktionen aus Finite-Element-Räumen annähern kann, siehe zum Beispiel das Lemma von Cea, Abschätzung (10.6). Die Approximationsgüte von Finite-Element-Räumen wird in diesem Abschnitt untersucht.

### 11.1 Polynominterpolation in Sobolev-Räumen

#### 11.1.1 Das Bramble-Hilbert-Lemma

Sei  $\Omega$  ein beschränktes Gebiet des  $\mathbb{R}^d$  mit Lipschitz-Rand. Wir beginnen mit grundlegenden Prinzipien der Polynominterpolation in Sobolev-Räumen.

**Lemma 11.1** *Für jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  sei ein  $a_\alpha \in \mathbb{R}$  gegeben. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom  $p \in P_m(\Omega)$  mit*

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = a_{\alpha}, \quad |\alpha| \leq m.$$

**Beweis:** Jedes Polynom aus  $P_m(\Omega)$  hat die Gestalt

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} b_{\beta} \mathbf{x}^{\beta}.$$

Einsetzen dieser Darstellung in die Bedingungen ergibt ein lineares Gleichungssystem  $M\mathbf{b} = \mathbf{a}$ , mit

$$M = (M_{\alpha\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \mathbf{x}^{\beta} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{b} = (b_{\beta}), \quad \mathbf{a} = (a_{\alpha}),$$

für  $|\alpha|, |\beta| \leq m$ . Das ist ein quadratisches Gleichungssystem, welches genau dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn  $M$  regulär ist.

Angenommen,  $M$  ist singular. Dann besitzt das zugehörige homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung. Das heißt, es gibt ein Polynom  $q \in P_m(\Omega) \setminus 0$  mit

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m.$$

Das Polynom  $q$  besitzt die Darstellung  $q(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \mathbf{x}^\beta$ . Wähle nun ein  $c_\beta \neq 0$  mit maximalem  $|\beta|$ . Dann gilt  $\partial_\beta q(\mathbf{x}) = c_\beta = \text{const} \neq 0$ , was dem Verschwinden des Integrals für  $\partial_\beta q(\mathbf{x})$  widerspricht. ■

Das Lemma besagt, dass ein Polynom eindeutig bestimmt ist, wenn man für jede Ableitung eine Bedingung an das Integral über  $\Omega$  stellt.

Das nächste Lemma beinhaltet eine Ungleichung vom Poincaré-Typus. Dabei bezeichnen wir mit  $D^k v$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , die totale Ableitung zur Ordnung  $k$  der Funktion  $v$ , z.B. für  $k = 1$  den Gradienten von  $v$ .

**Lemma 11.2** *Sei  $\Omega$  konvex und in einer Kugel vom Radius  $R$  enthalten. Seien  $k, l \in \mathbb{N}$  mit  $0 \leq k \leq l$  und sei  $p \in \mathbb{R}$  mit  $p \in [1, \infty]$ . Dann gilt für jedes  $v \in W^{l,p}(\Omega)$ , welches*

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq l - 1$$

erfüllt, die Abschätzung

$$\|D^k v\|_{L^p(\Omega)} \leq c R^{l-k} \|D^l v\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei die Konstante  $c$  nicht von  $\Omega$  und von  $v$  abhängt.

**Beweis:** Im Fall  $k = l$  braucht man nichts zu beweisen. Des weiteren genügt es, das Lemma für  $k = 0$  und  $l = 1$  zu beweisen, da der allgemeine Fall folgt, wenn man das Resultat dann auf  $\partial_\alpha v$  anwendet.

Da  $\Omega$  als konvex vorausgesetzt wurde, kann der Mittelwertsatz in der Form

$$v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}) = \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt,$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$  geschrieben werden. Integration dieser Beziehung bezüglich  $\mathbf{y}$  ergibt

$$v(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d\mathbf{y} - \underbrace{\int_{\Omega} v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{=0} = \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt \, d\mathbf{y},$$

wobei das eine Integral auf der linken Seite nach Voraussetzung an  $v$  verschwindet. Es folgt

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt \, d\mathbf{y}.$$

Nun werden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren und die Abschätzung  $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq 2R$  verwendet

$$|v(\mathbf{x})| \leq \frac{2R}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2 \, dt \, d\mathbf{y}. \quad (11.1)$$

Für  $p < \infty$  wird diese Abschätzung mit  $p$  potenziert und bezüglich  $\mathbf{x}$  integriert. Man erhält durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung mit  $p^{-1} + q^{-1} = 1 \implies p/q - p = p(1/q - 1) = -1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} &\leq \frac{cR^p}{|\Omega|^p} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2 \, dt \, d\mathbf{y} \right)^p \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{cR^p}{|\Omega|^p} \int_{\Omega} \underbrace{\left[ \left( \int_{\Omega} \int_0^1 1^q \, dt \, d\mathbf{y} \right)^{p/q} \right]}_{|\Omega|^{p/q}} \\ &\quad \times \left( \int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, dt \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, dt \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nun werden die Integrationen vertauscht (Satz von Fubini)

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_0^1 \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} \, dt.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung in einer Dimension findet man ein  $t_0 \in [0, 1]$ , so dass

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( \int_{\Omega} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Wir setzen  $\|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^p$  auf  $\mathbb{R}^d$  durch Null fort und nennen die Fortsetzung ebenfalls  $\|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^p$ . Dann ist

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left( \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Sei  $t_0 \in [0, 1/2]$ . Da das Integrationsgebiet nun der ganze  $\mathbb{R}^d$  ist, ergibt die Variablensubstitution  $t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y} = \mathbf{z}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} = \frac{1}{1-t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(\mathbf{z})\|_2^p \, d\mathbf{z} \leq 2 \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Führt man nun noch die äußere Integration über  $\mathbf{x}$  aus, so kürzt sich  $|\Omega|$  und man erhält insgesamt

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq 2cR^p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

da  $1/(1-t_0) \leq 2$ .

Im Fall  $t_0 > 1/2$  vertauscht man die Rollen von  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  sowie die Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini und argumentiert analog.

Der Fall  $p = \infty$  folgt aus (11.1). *Übungsaufgabe* ■

Das Lemma besagt, dass man die  $L^p(\Omega)$ -Norm einer niederen Ableitung von  $v$  durch dieselbe Norm einer höheren Ordnung abschätzen kann, falls die Integralmittelwerte der niederen Ableitungen verschwinden. Eine wichtige Anwendung dieses Lemmas ist der Beweis des Bramble–Hilbert–Lemmas. Dieses besagt, dass der Wert eines stetigen linearen Funktionals, das auf einem Sobolev–Raum definiert ist und auf einem Polynomraum der Ordnung  $m$  verschwindet, durch die Lebesgue–Norm der  $m+1$ -ten totalen Ableitung der Funktionen aus dem Sobolev–Raum abgeschätzt werden kann.

**Satz 11.3 Bramble–Hilbert–Lemma.** *Seien  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 0$ ,  $p \in [1, \infty]$  und  $F : W^{m+1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  ein stetiges lineares Funktional und seien die Voraussetzungen der Lemmata 11.1 und 11.2 erfüllt. Weiter sei*

$$F(p) = 0 \quad \forall p \in P_m(\Omega).$$

*Dann gibt es eine Konstante  $c(\Omega)$ , die unabhängig von  $v$  und  $F$  ist, mit*

$$|F(v)| \leq c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m+1,p}(\Omega).$$

**Beweis:** Sei  $v \in W^{m+1,p}(\Omega)$ . Wegen Lemma 11.1 gibt es ein Polynom aus  $P_m(\Omega)$  mit

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha}(v+p) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für } |\alpha| \leq m.$$

Lemma 11.2 liefert, mit  $l = m+1$ , nun die Abschätzung

$$\|v+p\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|D^{m+1}(v+p)\|_{L^p(\Omega)} = c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Aus dem Verschwinden von  $F$  für  $p \in P_m(\Omega)$  und der Stetigkeit von  $F$  folgt nun

$$|F(v)| = |F(v+p)| \leq c \|v+p\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

■

### 11.1.2 Interpolationsfehlerabschätzung

Der Interpolationsfehler für affine Familien Finiter-Elemente wird nun mit Hilfe des Bramble–Hilbert–Lemmas abgeschätzt. Die Strategie wird darin bestehen, dass man

- zuerst Abschätzungen auf einer Referenzgitterzelle zeigt,
- dann werden alle Abschätzungen über beliebige Gitterzellen  $K$  auf Abschätzungen über die Referenzgitterzelle überführt,
- die dort gezeigten Abschätzungen werden verwendet und
- schließlich wird auf  $K$  zurücktransformiert.

Dabei muss man auch untersuchen, was bei den beiden Transformationen geschieht.

Seien  $\hat{K} \in \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}$ , eine Referenzgitterzelle (abgeschlossenes und beschränktes Polyeder),  $\hat{P}(\hat{K})$  ein Polynomraum der Dimension  $N$  und  $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N : C^s(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$  stetige lineare Funktionale. Es wird vorausgesetzt, dass die Unisolvenzbedingung für den Raum  $\hat{P}(\hat{K})$  bezüglich der Funktionale  $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N$  erfüllt ist. Dann gibt es eine lokale Basis  $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_N \in \hat{P}(\hat{K})$ .

Für  $\hat{v} \in C^s(\hat{K})$  wird die Interpolierende  $I_{\hat{K}}\hat{v}$  durch

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v})\hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{x}})$$

definiert. Der Operator  $I_{\hat{K}}$  ist ein stetiger und linearer Operator von  $C^s(\hat{K})$  nach  $\hat{P}(\hat{K})$ . Aus der Linearität folgt, dass  $I_{\hat{K}}$  die Identität auf  $\hat{P}(\hat{K})$  ist *Übungsaufgabe*

$$I_{\hat{K}}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K}).$$

**Beispiel 11.4** Seien  $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$  beliebig,  $\hat{P}(\hat{K}) = P_0(\hat{K})$  und

$$\hat{\Phi}(\hat{v}) = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}}.$$

Das Funktional  $\hat{\Phi}$  ist stetig auf  $C^0(\hat{K})$ , da

$$|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} |\hat{v}(\hat{\mathbf{x}})| \, d\hat{\mathbf{x}} \leq \frac{|\hat{K}|}{|\hat{K}|} \max_{\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}} |\hat{v}(\hat{\mathbf{x}})| = \|\hat{v}\|_{C^0(\hat{K})}.$$

Für die konstante Funktion  $1 \in P_0(\hat{K})$  gilt  $\hat{\Phi}(1) = 1 \neq 0$ . Damit folgt die Unisolvenzbedingung und  $\{1\}$  ist die lokale Basis. Der Operator

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\Phi}(\hat{v})\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}}$$

ist der Mittelwertoperator, d.h. jede stetige Funktion auf  $\hat{K}$  wird durch eine konstante Funktion interpoliert, deren Funktionswert gleich dem Integralmittelwert ist.

Man kann auch  $\hat{\Phi}(\hat{v}) = \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}_0)$  für einen beliebigen Punkt  $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \hat{K}$  setzen. Auch dieses Funktional ist linear und stetig auf  $C^0(\hat{K})$ . Der damit definierte Interpolationsoperator  $I_{\hat{K}}$  interpoliert jede stetige Funktion durch eine konstante Funktion, deren Funktionswert gleich dem Funktionswert in  $\hat{\mathbf{x}}_0$  ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass der Interpolationsoperator  $I_{\hat{K}}$  von  $\hat{P}(\hat{K})$  und von den gewählten Funktionalen  $\hat{\Phi}_i$  abhängt.

*Übungsaufgabe, Interpolationen für andere FE* □

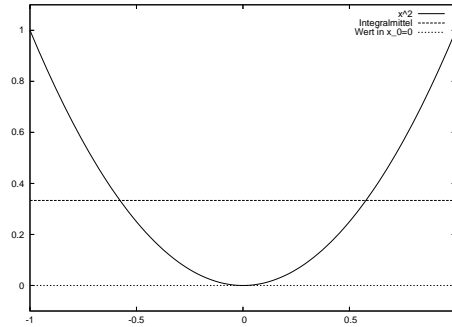


Abbildung 11.1: Interpolation von  $x^2$  im Intervall  $[-1, 1]$  in den  $P_0$  mit Integralmittelwert und mit den Funktionswert in  $x_0 = 0$ .

Nun wird die Interpolationsfehlerabschätzung auf der Referenzgitterzelle gezeigt.

**Satz 11.5** Seien  $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$  und  $p \in [1, \infty]$  mit  $(m+1-s)p > d$ . Dann gibt es eine von  $\hat{v}$  unabhängige Konstante  $c$  mit

$$\|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \leq c \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})} \quad \forall \hat{v} \in W^{m+1,p}(\hat{K}).$$

**Beweis:** Wegen der Sobolev–Ungleichung, Satz 4.24, ist die Einbettung

$$W^{m+1,p}(\hat{K}) \rightarrow C^s(\hat{K})$$

richtig für  $(m+1-s)p > d$ . Damit ist der Interpolationsoperator auf  $W^{m+1,p}(\hat{K})$  wohldefiniert. Aus der Identität des Interpolationsoperators auf  $P_m(\hat{K})$ , der Beschränktheit des Interpolationsoperators (linear und stetig von  $C^s(\hat{K}) \rightarrow \hat{P}(\hat{K}) \subset W^{m+1,p}(\hat{K})$ , alle Normen in  $P(\hat{K})$  sind äquivalent) und der Sobolev–Ungleichung erhält man für  $\hat{q} \in P_m(\hat{K})$

$$\begin{aligned} \|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} &= \|\hat{v} + \hat{q} - I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} + \|I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} + c \|\hat{v} + \hat{q}\|_{C^s(\hat{K})} \\ &\leq c \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})}. \end{aligned}$$

In Lemma 11.1 wird  $\hat{q}$  nun so gewählt, dass

$$\int_{\hat{K}} \partial_{\alpha}(\hat{v} + \hat{q}) \, d\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 11.2 erfüllt und es gilt

$$\|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \leq c \|D^{m+1}(\hat{v} + \hat{q})\|_{L^p(\hat{K})} = c \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}.$$

■

**Bemerkung 11.6** Im Satz wird nur verlangt, dass  $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$ . Das schließt nicht aus, dass  $\hat{P}(\hat{K})$  auch Polynome höherer Ordnung enthält. Die benötigt man jedoch für die Interpolationsfehlerabschätzung nicht, sofern die im Satz angegebene Sobolev–Einbettung erfüllt ist. □

Um den Interpolationsfehler für beliebige Gitterzellen und schließlich für den Finite–Element–Raum zu untersuchen, müssen wir zuerst Eigenschaften der affinen Abbildung studieren.

Wir betrachten eine affine Familie von Finite-Elementen, deren Gitterzellen von den affinen Abbildungen

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$$

erzeugt werden, wobei  $B$  eine reguläre  $d \times d$ -Matrix und  $\mathbf{b}$  ein  $d$ -Vektor ist.

Sei  $h_K$  der Durchmesser von  $K = F_K(\hat{K})$  (größter Abstand zweier Punkte die zu  $K$  gehören). Die Bilder  $\{K = F_K(\hat{K})\}$  sollen die folgende Bedingung erfüllen:

- $K \subset \mathbb{R}^d$  ist in einer Kugel vom Radius  $c_R h_K$  enthalten,
- $K$  enthält eine Kugel vom Radius  $c_R^{-1} h_K$ ,

wobei die Konstante  $c_R$  unabhängig von  $K$  ist. Demzufolge gilt für alle  $K$

$$\frac{\text{Umkreis}}{\text{Inkreis}} \leq c_R^2.$$

Eine Triangulierung, die dieser Eigenschaft genügt, wird quasi-uniform genannt. Die Namensgebung ist in der Literatur nicht einheitlich.

**Lemma 11.7** Für jede Matrixnorm  $\|\cdot\|$  gelten die Abschätzungen

$$\|B\| \leq ch_K, \quad \|B^{-1}\| \leq ch_K^{-1},$$

wobei die Konstanten von der Matrixnorm abhängen.

**Beweis:** Da  $\hat{K}$  ein polygonal berandetes Gebiet ist, also insbesondere ein Lipschitz-Gebiet, enthält es eine Kugel  $B(\hat{\mathbf{x}}_0, r)$ . Daher ist  $\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{y}} \in \hat{K}$  für alle  $\|\hat{\mathbf{y}}\|_2 = r$ . Somit sind die Bilder

$$\mathbf{x}_0 = B\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = B(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}$$

in  $K$  enthalten. Da die Triangulierung quasi-uniform ist, folgt für  $K$

$$\|B\hat{\mathbf{y}}\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leq c_R h_K.$$

Für die Spektralnorm gilt

$$\|B\|_2 = \sup_{\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}} \frac{\|B\hat{\mathbf{z}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{z}}\|_2} = \frac{1}{r} \sup_{\|\hat{\mathbf{z}}\|_2=r} \|B\hat{\mathbf{z}}\|_2 \leq \frac{2c_R}{r} h_K.$$

Da alle Matrixnormen äquivalent sind, gilt die Abschätzung auch für alle anderen Matrixnormen.

Die Abschätzung für  $\|B^{-1}\|$  folgt mit den gleichen Argumenten, wenn man die Rollen von  $K$  und  $\hat{K}$  vertauscht. ■

Im Beweis sieht man, dass die Konstanten in den Abschätzungen zwar nicht von  $K$ , aber von  $\hat{K}$  und vor allem von der Konstanten  $c_R$  abhängen.

Die Elemente der Matrizen  $B$  und  $B^{-1}$  werden mit  $b_{ij}$  und  $b_{ij}^{(-1)}$  bezeichnet. Da  $\|B\|_\infty = \max_{i,j} |b_{ij}|$  ebenfalls eine Matrixnorm ist, gilt

$$|b_{ij}| \leq ch_K, \quad |b_{ij}^{(-1)}| \leq ch_K^{-1}.$$

Aus den elementweisen Abschätzungen für die Matrix  $B$  erhält man (Leibnizsche Determinantenformel)

$$|\det B| \leq ch_K^d, \quad |\det B^{-1}| \leq ch_K^{-d}.$$

Als nächstes wollen wir sicherstellen, dass der transformierte Interpolationsoperator mit dem natürlichen Interpolationsoperator auf  $K$  übereinstimmt. Der letztere ist durch

$$I_K v = \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(v) \phi_{K,i}$$

definiert, wobei  $\{\phi_{K,i}\}$  die Basis des Raums

$$P(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} : p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K})\}$$

ist, die der Beziehung  $\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \delta_{ij}$  genügt. Die Funktionale waren durch

$$\Phi_{K,i}(v) = \hat{\Phi}_i(v \circ F_K)$$

definiert. Daher folgt aus der Bedingung für die lokale Basis

$$\Phi_{K,i}(\hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}) = \hat{\Phi}_i(\hat{\phi}_j) = \delta_{ij},$$

also  $\phi_{K,j} = \hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}$ . Aus

$$\begin{aligned} I_{\hat{K}} \hat{v} &= \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v}) \hat{\phi}_i = \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(\underbrace{\hat{v} \circ F_K^{-1}}_{=v}) \phi_i \circ F_K = \left( \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(v) \phi_{K,i} \right) \circ F_K \\ &= I_K v \circ F_K \end{aligned}$$

folgt, dass  $I_{\hat{K}} \hat{v}$  sich richtig transformiert.

Mit der Kettenregel folgt *Übungsaufgabe*

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_j} b_{ji}^{(-1)}, \quad \frac{\partial \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} b_{ji}.$$

Daraus ergibt sich (mit jeder Ableitung erhält man einen weiteren Faktor von  $B$  bzw.  $B^{-1}$ )

$$\|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2 \leq ch_K^{-k} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2, \quad \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2 \leq ch_K^k \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2.$$

Man erhält

$$\int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq ch_K^{-kp} |\det B| \int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}} \leq ch_K^{-kp+d} \int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}}$$

und

$$\int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}} \leq ch_K^{kp} |\det B^{-1}| \int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq ch_K^{kp-d} \int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x}.$$

Aus der Interpolationsfehlerabschätzung auf der Referenzzelle folgt

$$\|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k (\hat{v} - I_{\hat{K}} \hat{v})\|_{L^p(\hat{K})}^p \leq c \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p, \quad 0 \leq k \leq m+1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|D_{\mathbf{x}}^k (v - I_K v)\|_{L^p(K)}^p &\leq ch_K^{-kp+d} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k (\hat{v} - I_{\hat{K}} \hat{v})\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{-kp+d} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{(m+1-k)p} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{(m+1-k)p} \|D_{\mathbf{x}}^{m+1} v\|_{L^p(K)}^p. \end{aligned}$$

Damit haben ist die Interpolationsfehlerabschätzung für eine beliebige Gitterzelle gezeigt.

**Satz 11.8** *Sei eine affine Familie Finiter-Elemente durch eine Referenzgitterzelle  $\hat{K}$ , Funktionale  $\{\hat{\Phi}_i\}$  und einen Polynomraum  $\hat{P}(\hat{K})$  gegeben. Weiter seien alle Bedingungen aus dem Satz 11.5 erfüllt. Dann gibt es eine Konstante  $c$  unabhängig von  $v \in W^{m+1,p}(K)$  mit*

$$\|D^k (v - I_K v)\|_{L^p(K)} \leq ch_K^{m+1-k} \|D^{m+1} v\|_{L^p(K)}.$$

Man beachte, dass die Potenz von  $h_K$  unabhängig von  $p$  und  $d$  ist.

Sei eine quasi-uniforme Triangulierung gegeben und definiere

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}.$$

Dann erhält man durch Summation über die Gitterzellen die Interpolationsfehlerabschätzung für den globalen Finite-Element-Raum:

$$\begin{aligned} \|D^k(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|D^k(v - I_K v)\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} ch_K^{(m+1-k)p} \|D^{m+1}v\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq ch^{(m+1-k)} \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für lineare Finite-Elemente  $P_1$  ( $m = 1$ ) hat man beispielsweise die Abschätzungen

$$\|v - I_h v\|_{L^p(\Omega)} \leq ch^2 \|D^2 v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} \leq ch \|D^2 v\|_{L^p(\Omega)},$$

falls  $v \in W^{2,p}(\Omega)$ .

## 11.2 Inverse Abschätzungen

In diesem Abschnitt wird die Methode zum Beweis der Interpolationsfehlerabschätzung dazu verwendet, um sogenannte inverse Abschätzungen zu zeigen. Im Gegensatz zu Interpolationsfehlerabschätzungen wird dabei eine Norm einer höheren Ableitung einer Finite-Element-Funktion durch die Norm einer niederen Ableitung abgeschätzt. Man erhält als Faktor dann negative Potenzen des Durchmessers der Gitterzelle.

**Satz 11.9** *Seien  $0 \leq k \leq l$  natürliche Zahlen und  $p, q \in [1, \infty]$ . Dann gibt es eine Konstante  $c$ , die nur von  $k, l, p, q, \hat{K}, \hat{P}(\hat{K})$  abhängt, mit*

$$\|D^l v_h\|_{L^q(K)} \leq ch_K^{(k-l)-d(p^{-1}-q^{-1})} \|D^k v_h\|_{L^p(K)} \quad \forall v_h \in P(K).$$

**Beweis:** Zunächst wird die Abschätzung für  $h_{\hat{K}} = 1$  und  $k = 0$  auf der Referenzzelle gezeigt. Da in einem endlichdimensionalen Raum alle Normen äquivalent sind, kann man eine Seminorm durch eine Norm abschätzen. Man erhält

$$\|D^l \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} \leq \|\hat{v}_h\|_{W^{l,q}(\hat{K})} \leq c \|\hat{v}_h\|_{L^p(\hat{K})} \quad \forall \hat{v}_h \in \hat{P}(\hat{K}).$$

Im Falle  $k > 0$  setzt man

$$\tilde{P}(\hat{K}) = \left\{ \partial_{\alpha} \hat{v}_h : \hat{v}_h \in \hat{P}(\hat{K}), |\alpha| = k \right\},$$

was gleichfalls ein Polynomraum ist. Wendet man die obige Abschätzung auf  $\tilde{P}(\hat{K})$  an, erhält man

$$\begin{aligned} \|D^l \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} &\leq c \sum_{|\alpha|=k} \|D^{l-k}(\partial_{\alpha} \hat{v}_h)\|_{L^q(\hat{K})} \leq c \sum_{|\alpha|=k} \|\partial_{\alpha} \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} \\ &\leq c \|D^k \hat{v}_h\|_{L^p(\hat{K})}. \end{aligned}$$



Diese Abschätzung wird genauso wie im vorherigen Abschnitt auf die Gitterzelle  $K$  transformiert. Aus den Abschätzungen für die Transformationen erhält man

$$\begin{aligned} \|D^l v_h\|_{L^q(K)} &\leq ch_K^{-l+d/q} \|D^l \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} \leq ch_K^{-l+d/q} \|D^k \hat{v}_h\|_{L^p(\hat{K})} \\ &\leq ch_K^{k-l+d/q-d/p} \|D^k v_h\|_{L^p(K)}. \end{aligned}$$

■

Der springende Punkt im Beweis war die Äquivalenz aller Normen, eine Eigenschaft die bekanntlich bei unendlich-dimensionalen Räumen nicht gilt.

Für  $p = q$  überträgt sich die Abschätzung auf den globalen Finite-Element-Raum, sofern eine reguläre Triangulierung von  $\Omega$  verwendet wird

$$\|D^l v_h\|_{L_h^p(\Omega)} \leq ch^{k-l} \|D^k v_h\|_{L_h^p(\Omega)},$$

mit

$$\|\cdot\|_{L_h^p(\Omega)} = \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p}.$$

Die zellenweise Normdefinition ist wichtig für  $l \geq 2$ , da dann die Finite-Element-Funktionen im allgemeinen nicht mehr die nötige Regularität für die globale Norm besitzen.

Bei nichtlinearen Problemen ist manchmal eine andere inverse Abschätzung wichtig.

**Satz 11.10** *Sei  $S \in C^0(\Omega)$  ein Finite-Element-Raum, der auf einer regulären Triangulierung mit affin äquivalenten Gitterzellen definiert ist. Dann gilt*

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_d(h) \|v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

mit  $c_2(h) = c |\ln h|^{1/2}$ ,  $c_d(h) = ch^{-d/2+1}$  für  $d \geq 3$ .

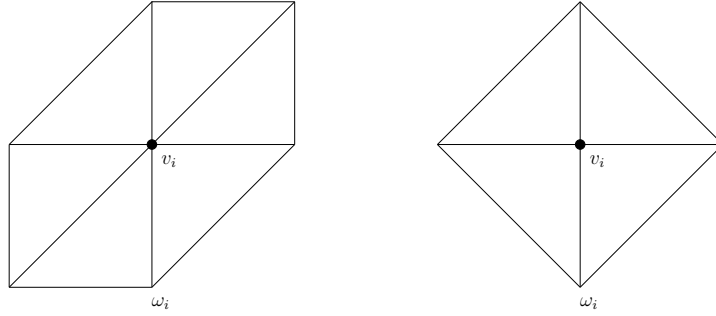
### 11.3 Interpolation nichtglatter Funktionen

In der Interpolationstheorie aus den letzten Abschnitten ist es zwingend erforderlich, dass der Interpolationsoperator stetig definiert ist auf dem Sobolev-Raum, dem die zu interpolierende Funktion angehört. Wenn man beispielsweise unstetige Funktionen mit stetigen, stückweise linearen Finite-Elementen interpolieren will, so erhält man aus den letzten Abschnitten keine Resultate. Am einfachsten lässt sich hier Abhilfe schaffen, indem die zu approximierende Funktion zuerst geglättet und dann die geglättete Funktion interpoliert wird. Bei dieser Methode kommt es jedoch zu Problemen am Rand von  $\Omega$ . Diese Methode wird hier nicht weiter betrachtet.

Es gibt zwei oft genutzte Interpolationsoperatoren für nichtglatte Funktionen. Der Interpolationsoperator von Clément [Clé75] ist für Funktionen aus  $L^1(\Omega)$  definiert und er lässt sich praktisch auf alle Finiten-Elemente verallgemeinern. Der Interpolationsoperator von Scott und Zhang [SZ90] ist spezieller. Er besitzt jedoch den Vorteil, dass er Nullrandbedingungen erhält. Wir werden hier nur den Interpolationsoperator von Clément, an Hand linearer Finiten-Elemente, betrachten.

Sei  $\mathcal{T}_h$  eine reguläre Triangulierung des polyhedralen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d \in \{2, 3\}$ , mit Simplexes  $K$ . Mit  $P_1$  wird der Raum der stetigen, stückweise linearen Finiten-Elemente auf  $\mathcal{T}_h$  bezeichnet.

Zu jedem Knoten  $V_i$  der Triangulierung wird das Gebiet  $\omega_i$  der Vereinigung aller Gitterzellen definiert, bei denen  $V_i$  ein Knoten ist.



Zu  $v \in L^1(\Omega)$  definieren wir den Interpolationsoperator  $R_h v \in P_1$  mit Hilfe der lokalen  $L^2$ -Projektion. Sei  $P_1(\omega_i)$  der Raum der stückweise linearen Finiten-Elemente auf  $\omega_i$ . Dann ist die lokale  $L^2$ -Projektion von  $v \in L^1(\omega_i)$  die Lösung  $p_i \in P_1(\omega_i)$  von

$$\int_{\omega_i} (v - p_i)(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in P_1(\omega_i). \quad (11.2)$$

Setze

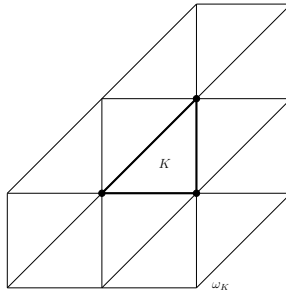
$$R_h v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N p_i(V_i)\phi_i(\mathbf{x}),$$

wobei  $\{\phi_i\}_{i=1}^N$  die übliche Basis von  $P_1$  ist. Da  $R_h v$  eine Linearkombination der Basisfunktionen ist, gilt  $R_h : L^1(\Omega) \rightarrow P_1$ .

**Satz 11.11** Seien  $k, l \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{R}$  mit  $0 \leq k \leq l \leq 2$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ . Sei  $\omega_K$  die Vereinigung aller Gebiete  $\omega_i$ , die die Gitterzelle  $K$  enthalten. Dann gilt für alle  $v \in W^{l,q}(\omega_K)$  die Abschätzung

$$\|D^k(v - R_h v)\|_{L^q(K)} \leq ch^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)} \quad (11.3)$$

mit  $h = \text{diam}(\omega_K)$ , wobei die Konstante  $c$  unabhängig von  $v$  und  $h$  ist.



**Beweis:** Die Behauptung ist offensichtlich im Falle  $k = l = 2$ , da  $D^2 R_h v|_K = 0$ . Sei  $k \in \{0, 1\}$ . Da die  $L^2$ -Projektion ein Element bester Approximation liefert, folgt aus (11.2)

$$R_h p = p \quad \text{in } K \text{ für alle } p \in P_1(\omega_K). \quad (11.4)$$

Das bedeutet, dass  $R_h$  ein konsistenter Operator ist.

Als nächstes wird die Stabilität von  $R_h$  nachgewiesen. Mit Hilfe der inversen Ungleichung erhält man

$$\|p\|_{L^\infty(\omega_i)} \leq ch^{-d/2} \|p\|_{L^2(\omega_i)} \quad \text{für alle } p \in P_1(\omega_i).$$

Die inverse Ungleichung und die Definition (11.2) der lokalen  $L^2$ -Projektion mit der Testfunktion  $q = p_i$  liefern

$$\|p_i\|_{L^\infty(\omega_i)}^2 \leq ch^{-d} \|p_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 \leq ch^{-d} \|v\|_{L^1(\omega_i)} \|p_i\|_{L^\infty(\omega_i)}.$$

Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung folgt nun für  $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$  *Übungsaufgabe*

$$|p_i(V_i)| \leq ch^{-d/q} \|v\|_{L^q(\omega_i)} \quad (11.5)$$

für alle  $V_i \in K$ . Aus der Regularität der Triangulierung folgt für die Basisfunktionen (inverse Abschätzung)

$$\|D^k \phi_i\|_{L^\infty(K)} \leq ch^{-k}, \quad k = 0, 1. \quad (11.6)$$

Die Kombination von (11.5) und (11.6) ergibt die Stabilität von  $R_h$

$$\begin{aligned} \|D^k R_h v\|_{L^q(K)} &\leq \sum_{V_i \in K} |p_i(V_i)| \|D^k \phi_i\|_{L^q(K)} \\ &\leq c \sum_{V_i \in K} h^{-d/q} \|v\|_{L^q(\omega_i)} \|D^k \phi_i\|_{L^\infty(K)} \|1\|_{L^q(K)} \\ &\leq c \sum_{V_i \in K} h^{-d/q} \|v\|_{L^q(\omega_i)} h^{-k} h^{d/q} \\ &= ch^{-k} \|v\|_{L^q(\omega_K)}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Abgesehen davon, dass keine Referenzgitterzelle verwendet wird, läuft der Rest des Beweises genauso wie bei der Interpolationsabschätzung bei der Polynominterpolation, Satz 11.5. Nach Lemmata 11.1 und 11.2 gibt es ein Polynom  $p \in P_1(\omega_K)$  mit

$$\|D^j(v - p)\|_{L^q(\omega_K)} \leq ch^{l-j} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)}, \quad 0 \leq j \leq l \leq 2. \quad (11.8)$$

Mit der Dreiecksungleichung, (11.4), (11.7) und (11.8) erhält man

$$\begin{aligned} \|D^k(v - R_h v)\|_{L^q(K)} &\leq \|D^k(v - p)\|_{L^q(K)} + \|D^k R_h(v - p)\|_{L^q(K)} \\ &\leq \|D^k(v - p)\|_{L^q(K)} + ch^{-k} \|v - p\|_{L^q(\omega_K)} \\ &\leq c \sum_{j=0}^l h^{j-k} \|D^j(v - p)\|_{L^q(\omega_K)} \\ &\leq c \sum_{j=0}^l h^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)} = ch^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)}. \end{aligned}$$

■

Falls alle Gitterzellen in  $\omega_K$  etwa die gleiche Größe besitzen, kann in der Interpolationsfehlerabschätzung (11.3)  $h$  durch  $h_K$  ersetzt werden. Diese Eigenschaft der Gitterzellen ist oft gegeben.