Kapitel 8

Darstellungsformeln für die Lösung von parabolischen Differentialgleichungen

Wir hatten im Beispiel 5.2 gesehen, dass die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{auf} \;\; \Omega \times (0, \infty) \tag{8.1}$$

eine parabolische Differentialgleichung ist. Der physikalische Hintergrund legt nahe, dass man die Daten der Wärmeverteilung $u_0 \; : \; \Omega \to \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie die Temperatur am Rand $g \; : \; \partial\Omega \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ als Daten des physikalischen Prozesses benötigt. Im Abschnitt 1.3.2 wurden bereits ein Maximumprinzip und die Eindeutigkeit der Lösung für (8.1) gezeigt.

8.1 Die Fundamentallösung im Ganzraum

Wir betrachten (8.1) für $\Omega = \mathbb{R}^d$. In diesem Fall wird die Randbedingung g durch eine Beschränktheitsanforderung an $u(., t)$ ersetzt.

Sei zunächst $f = 0$. Das einzige Datum im Problem ist nun die Anfangsbedingung. Angenommen, man könnte in diesem Fall die eindeutige Lösbarkeit der Wärmeleitungsgleichung zeigen, dann würde das eine Abbildung von den Anfangsbedingungen u_0 auf die Lösungen $u(t)$ der homogenen Gleichung definieren:

$$S(t) \; : \; u_0 \mapsto u(t).$$

Der Operator $S(t)$ ist ein sogenannter Evolutionsoperator: Für ein System im Zustand u_0 gibt der Operator an, in welchem Zustand das System eine Zeit t später sein wird. Es gilt

$$S(t + s) = S(t) \circ S(s),$$

denn die Daten der homogenen Gleichung enthalten keine Abhängigkeit von der Zeit. Das heißt, der Zustand zur Zeit $t + s$ ist identisch damit, dass der Prozess mit Anfangsbedingung u_0 bis zur Zeit s betrachtet wurde und danach der Zustand zur Zeit s als Anfangsbedingung für den Prozess bis zur Zeit t genommen wurde. Diese Eigenschaft ist der Grund für die folgende Definition.

Definition 8.1 *Die Familie $S(t), t \in [0, \infty)$, wird Halbgruppe zur Evolutionsgleichung genannt.* □

Definition 8.2 *Die Funktion*

$$\Phi(\mathbf{x},t) := \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{8.2}$$

wird Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung genannt. □

Das Konzept ist nun so ähnlich wie bei der Poisson–Gleichung. Zunächst rechnet man nach, dass Φ Lösung von (8.1) mit $f = 0$ außerhalb des singulären Punkts $t = 0$ ist. *Übungsaufgabe*

Nun wird gezeigt, dass $\Phi(.,t)$ die Wärmeverteilung zur Zeit $t > 0$ beschreibt, wenn zur Zeit $t = 0$ die Wärmemenge 1 im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ konzentriert war.

Lemma 8.3 *Die Funktion Φ ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung (8.1) mit $f = 0$ zur Anfangsbedingung*

$$\Phi(., t_k) \to \delta_{\mathbf{0}} \quad \textit{in } \mathcal{D}' \tag{8.3}$$

für $0 < t_k \to 0$.

Beweis: Dass Φ die homogene Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ löst, ist eine Übungsaufgabe. Wir zeigen nun, dass die Gesamtwärmemenge für $t > 0$ gleich 1 ist.

Es gilt für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)}\, d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{z}\|_2^2}\, d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^{d} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z_i^2}\, dz_1 \ldots dz_d = \prod_{i=1}^{d} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2}\, dz_i \right) = 1. \end{aligned}$$

Die Substitution $\mathbf{z} = \mathbf{x}/(2\sqrt{t})$ wurde verwendet. Das letzte Integral wird mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnet ($\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$):

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2}\, dz \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z_1^2}\, dz_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z_2^2}\, dz_2 \right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\mathbf{z}\|_2^2}\, d\mathbf{z} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\infty} r e^{-r^2}\, dr \right) d\phi = -2\pi \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Nun wollen wir (8.3) zeigen. Außerhalb jeder Kugel $B(\mathbf{0}, \rho) \subset \mathbb{R}^d$ mit $\rho > 0$ gilt $\Phi(., t_k) \to 0$ gleichmäßig für $t_k \to 0$ (unabhängig von $\mathbf{x}$, da $e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)} \le 1$). Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ eine Testfunktion. Da φ stetig ist, findet man zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\rho > 0$ mit $|\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{0})| \le \varepsilon/2$ für alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, \rho)$. Damit und dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t_k)\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \varphi(\mathbf{0}) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t_k) \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})\right)\, d\mathbf{x} \right| \\ &\le \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0},\rho)} \Phi(\mathbf{x}, t_k) \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})\right)\, d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{B(\mathbf{0},\rho)} \Phi(\mathbf{x}, t_k) \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})\right)\, d\mathbf{x} \right|. \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert gegen Null, da $\Phi(., t_k) \to 0$ gleichmäßig für $t_k \to 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t_k)\varphi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} - \varphi(\mathbf{0}) \right| &\to \left| \int_{B(\mathbf{0},\rho)} \Phi(\mathbf{x}, t_k) \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})\right)\, d\mathbf{x} \right| \\ &\le \int_{B(\mathbf{0},\rho)} |\Phi(\mathbf{x}, t_k)|\, |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})|\, d\mathbf{x} \le \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

für $t_k \to 0$. Für kleines t_k gilt also $|\langle\Phi(., t_k)\rangle(\varphi) - \varphi(\mathbf{0})| < \varepsilon$, womit (8.3) gezeigt ist. $\blacksquare$

8.2 Lösung der homogenen Gleichung im Ganzraum

Wir nutzen nun physikalische Intuition, um eine Lösung zu erraten. In jedem Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ ist zu Beginn die Wärmemenge $u_0(\mathbf{y})$. Diese Wärmemenge ergibt nach der Zeit $t > 0$ eine Wärmeänderung am Ort $\mathbf{x}$ um $u_0(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$, denn $\Phi(., t)$ gibt für anfängliche Punktwärme die Verteilung nach der Zeit t an. Die Gesamtlösung ergibt sich nun als Superposition der Einzellösungen, also als Integral.

Satz 8.4 *Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u &=& 0 & \textit{auf}\ \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(., 0) &=& u_0 & \textit{auf}\ \mathbb{R}^d \end{array} \tag{8.4}$$

für $u_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y})\ d\mathbf{y}. \tag{8.5}$$

Genauer gilt

1.) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ und es gilt die obere Gleichung von (8.4),

2.) $u \in C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ und es gelten beide Gleichungen von (8.4).

Beweis: 1.) Wegen $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist das Integral in (8.5) wohldefiniert. Alle Ableitungen von $\Phi(., t)$ sind wieder integrierbar (*Übungsaufgabe*) und man kann die Funktion Φ unter dem Integral differenzieren. Damit ist $u(., t)$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (beim Differenzieren nach $\mathbf{x}$ spielt u_0 keine Rolle) und es gilt, da $t > 0$ ist,

$$(\partial_t - \Delta)\, u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t - \Delta)\, \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y})\ d\mathbf{y} = 0.$$

Damit löst u die obere Gleichung von (8.4).

2.) In der Rechnung $\langle\Phi(., t_k)\rangle(\varphi) \to \varphi(\mathbf{0})$ im Beweis von Lemma 8.3 hatten wir nur die Stetigkeit von φ ausgenutzt. Insbesondere kann man $\varphi = u_0$ setzen. Mit derselben Rechnung erhält man für $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ und $t_k \to 0$

$$u(\mathbf{x}_k, t_k) = \langle\Phi(. - \mathbf{x}_k, t_k)\rangle(u_0) \to \delta_{\mathbf{x}_0}(u_0) = u_0(\mathbf{x}_0).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von u für $t \to 0$ und die zweite Gleichung von (8.4). $\blacksquare$

8.3 Die Lösung des inhomogenen Problems

Eine rechte Seite $f(\mathbf{x}, t)$ in der Wärmeleitungsgleichung bedeutet physikalisch eine Wärmequelle. Zur Zeit t wird an der Stelle $\mathbf{x}$ dem System die Wärmemenge $f(\mathbf{x}, t)$ zugeführt (oder entzogen, falls das Vorzeichen von $f(\mathbf{x}, t)$ negativ ist). Dabei ist f als Dichte der Quelle zu sehen, die über Raum und Zeit verteilt ist. Wir setzen dann eine Funktion aus den Einzellösungen zusammen, die zu den Quelltermen gehören

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}, s)\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)\ d\mathbf{y}ds. \tag{8.6}$$

Es wird jetzt in einem einfachen Fall nachgewiesen, dass die so definierte Funktion tatsächlich eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung ist.

Lemma 8.5 *Die Funktion Φ, trivial fortgesetzt auf $\mathbb{R}^d \times (-\infty, 0]$, erfüllt im Distributionssinne auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$*

$$(\partial_t - \Delta)\,\Phi = \delta_{\mathbf{0}}.$$

Beweis: Wir betrachten eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ und einen Raum–Zeit–Zylinder $Q_{\delta,\tau} := B(\mathbf{0}, \delta) \times (-\tau, \tau)$. Es gilt für beliebige $\delta, \tau > 0$

$$\begin{aligned}
&\langle (\partial_t - \Delta)\,\Phi \rangle(\varphi) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t)\,(-\partial_t - \Delta)\,\varphi(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}dt \\
&= -\int_{Q_{\delta,\tau}} \Phi(\mathbf{x}, t)\,(\partial_t + \Delta)\,\varphi(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}dt - \int_{\mathbb{R}^{d+1}\setminus Q_{\delta,\tau}} \Phi(\mathbf{x}, t)\,(\partial_t + \Delta)\,\varphi(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}dt \\
&= -\int_{Q_{\delta,\tau}} \Phi(\mathbf{x}, t)\,(\partial_t + \Delta)\,\varphi(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}dt + \int_{\mathbb{R}^{d+1}\setminus Q_{\delta,\tau}} (\partial_t - \Delta)\,\Phi(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x}dt \\
&\quad + \left[\int_{B(\mathbf{0},\delta)} \Phi(\mathbf{x}, t)\varphi(\mathbf{x}, t)\ d\mathbf{x} \right]_{-\tau}^{\tau} \\
&\quad - \int_{-\tau}^{\tau} \int_{\partial B(\mathbf{0},\delta)} (\Phi \nabla\varphi \cdot \mathbf{n} - \nabla\Phi \cdot \mathbf{n}\varphi)\,(\mathbf{s}, t)\ d\mathbf{s}dt.
\end{aligned}$$

Im ersten Integral ist $(\partial_t + \Delta)\,\varphi(\mathbf{x}, t)$ beschränkt und Φ hat beschränkte Integrale im Raum. Für τ klein, ist dieses Integral also auch klein und konvergiert gegen Null.

Das zweite Integral verschwindet, da Φ klassische Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung außerhalb des Nullpunkts ist.

Für das dritte Integral betrachten wir $\delta \gg \tau$ und $\delta \to 0$. Wie im Beweis von Lemma 8.3 rechnet man nach, dass das Integral gegen $\varphi(\mathbf{0})$ konvergiert. Dieses Integral liefert die rechte Seite in der Behauptung des Lemmas.

Auch für das vierte Integral betrachten wir $\delta \gg \tau$ und $\delta \to 0$. Dann ist das Integral wegen des exponentiellen Faktors von Φ klein und konvergiert gegen Null.

■

Das Lemma impliziert, dass

$$u(\mathbf{x}, t) := (\Phi * \varphi)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)\varphi(\mathbf{y}, s)\ d\mathbf{y}ds$$

eine Lösung von $(\partial_t - \Delta)\,u = \varphi$ ist, denn es gilt

$$\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)\,u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t - \Delta)\,\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s)\varphi(\mathbf{y}, s)\ d\mathbf{y}ds \\
&= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_{\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s}\varphi(\mathbf{y}, s)\ d\mathbf{y}ds = \delta_{\mathbf{x}-\mathbf{y},t-s}\varphi(\mathbf{y}, s) = \varphi(\mathbf{x}, t).
\end{aligned}$$

Allerdings will man normalerweise nicht für negative Zeiten lösen. Man hat im allgemeinen auch gar keine rechte Seite für negative Zeiten gegeben. Deshalb betrachten wir den Fall, dass die rechte Seite gegeben ist als $f = \varphi\chi_{[0,\infty)}$, wobei χ_I die charakteristische Funktion des Intervalls I bezeichnet (1 in I und 0 außerhalb von I) und ψ als glatt vorausgesetzt wird. Das heißt, f kann zur Zeit $t = 0$ springen. Dann gilt, dass

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s)\ d\mathbf{y}ds \tag{8.7}$$

einen Lösung für positive Zeiten ist. Sieht man sich nämlich den Beweis von Lemma 8.5 genau an, erkennt man, dass die Glattheit von φ für $t < 0$ unerheblich ist, da im ersten Integral für negative Zeiten mit Null multipliziert wird ($\Phi(\mathbf{x}, t)$ ist trivial fortgesetzt). Zudem wirkt der Operator $(\partial_t - \Delta)$ nur auf die Fundamentallösung Φ und die Glattheit der Testfunktion wird nur in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ ausgenutzt wurde. Deshalb reicht die Glattheit von f in einer Umgebung von $(\mathbf{x}, t)$, $t > 0$, die nach Konstruktion gegeben ist, dafür, dass (8.7) eine Lösung für positive Zeiten ist.

Nun wird die Lösungsdarstellung (8.7) noch vereinfacht. Für $s < 0$ verschwindet $f(\mathbf{y}, s)$ und für $s > t$ verschwindet $\Phi(., t-s)$. Man findet daher die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \ d\mathbf{y} ds,$$

also genau (8.6).

Satz 8.6 *Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f \quad \text{auf } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(., 0) &= u_0 \quad \text{auf } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ *und* $u_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ *ist gegeben durch*

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) \ d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \ d\mathbf{y} ds. \qquad (8.8)$$

Beweis: Die Funktion (8.6) erfüllt die Anfangsbedingung $u(., 0) = 0$. Daher erfüllt die Linearkombination mit der Lösung des homogenen Problems sowohl die Anfangsbedingung als auch die Gleichung. ■

8.4 Maximumprinzip und Eindeutigkeit für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Für eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird gefordert:

- Die erste Zeitableitung und alle zweiten Ortsableitungen existieren als stetige Funktionen.
- Die Funktion ist stetig auf dem abgeschlossenen Raum–Zeit–Zylinder $\overline{\Omega}_T = \overline{\Omega} \times [0, T]$.

Das Maximumprinzip für klassische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten wurde bereits im Abschnitt 1.3.2 gezeigt. In diesem Abschnitt wird der Ganzraum betrachtet.

Lemma 8.7 Starkes Maximumprinzip. *Die Lösung (8.5) der homogenen Gleichung (8.4) erfüllt*

$$u(\mathbf{x}, t) \le \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$$

für alle $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. *Ist* $u_0(\mathbf{x})$ *nicht konstant, dann gilt sogar die strikte Ungleichung.*

Beweis: *Übungsaufgabe* ■

Die Aussage des Lemmas bedeutet, dass ein einzelner Punkt $\mathbf{x}_0$ mit $u_0(\mathbf{x}_0) < \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$ bewirkt, dass für beliebig kleine $t > 0$ überall $u(., t) < \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$ gilt. Man sagt, die Wärmeleitungsgleichung besitzt eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Für die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems im Gesamtraum benötigt man jedoch eine etwas andere Aussage als von Lemma 8.7, nämlich, dass jede Lösung des Problems ein Maximumprinzip erfüllt. Dies ist aber im allgemeinen falsch.

Satz 8.8 *Es gibt unendlich viele Lösungen* $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *der homogenen Wärmeleitungsgleichung (8.4).*

Beweis: Siehe Literatur, etwa [Joh82, Kapitel 7]. ∎

Man benötigt für die Eindeutigkeit also noch Zusatzbedingungen.

Satz 8.9 Maximumprinizip für das Gesamtraumproblem. *Sei* $u \in C(\mathbb{R}^d \times [0,T])$ *mit stetigen ersten Zeit– und zweiten Ortsableitungen auf* $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ *Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (8.4). Weiter erfülle* u *für Konstanten* $A, a > 0$ *die Wachstumsbedingung*

$$u(\mathbf{x},t) \le Ae^{a\|\mathbf{x}\|_2^2} \quad \forall\ (\mathbf{x},t) \in \mathbb{R}^d \times (0,T). \tag{8.9}$$

Dann gilt

$$\sup_{(\mathbf{x},t)\in\mathbb{R}^d\times[0,T]} u(\mathbf{x},t) = \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x}).$$

Beweis: Es genügt, die Aussage für ein kleines Zeitintervall zu zeigen. Iteration liefert dann die Aussagen für alle Zeiten.

Wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass für (kleines) $\varepsilon > 0$ gilt $4a(T+\varepsilon) < 1/2$, also $4a(T+\varepsilon) = (1-\gamma)/2$ mit $\gamma > 0$. Nun wird für ein $\mu > 0$

$$v(\mathbf{x},t) := u(\mathbf{x},t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{d/2}} e^{\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2/(4(T+\varepsilon-t))}$$

definiert. Man rechnet nach, dass v die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt. *Übungsaufgabe ?*

Wir wollen nun das Maximumprinzip für beschränkte Gebiete, Satz 1.9 auf v anwenden. Dazu wird $B(\mathbf{y},r)$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ und großes $r > 0$ betrachtet. Für die Anfangswerte gilt

$$v(\mathbf{x},0) \le u(\mathbf{x},0) = u_0(\mathbf{x}).$$

Für die Werte $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{y},r)$ findet man mit

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}+\mathbf{y}\|_2^2 \le 2\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2\right) = 2\left(r^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2\right),$$

(Youngsche Ungleichung) und damit dass der zweite Term streng monoton fallend ist, dass

$$\begin{aligned}
v(\mathbf{x},t) &= u(\mathbf{x},t) - \frac{\mu}{(T+\varepsilon-t)^{d/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon-t))} \\
&\le Ae^{a\|\mathbf{x}\|_2^2} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{d/2}} e^{r^2/(4(T+\varepsilon))} \\
&\le Ae^{2a(r^2+\|\mathbf{y}\|_2^2)} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{d/2}} e^{ar^2/(4a(T+\varepsilon))} \\
&= Ae^{2a(r^2+\|\mathbf{y}\|_2^2)} - \frac{\mu}{(T+\varepsilon)^{d/2}} e^{2ar^2/(1-\gamma)} \\
&\le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

falls $r > 0$ groß, da dann der zweite Term dominiert $(2/(1-\gamma) > 2)$. Das Maximumprinzip auf $B(\mathbf{y},r)$ liefert $\sup_{\mathbf{x}\in B(\mathbf{y},r)} v(\mathbf{x},t) \le \sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$. Dabei war μ beliebig. Für $\mu \to 0$ erhält man das gewünschte Ergebnis. ∎

Folgerung 8.10 Eindeutigkeit der Lösung des Ganzraumproblems. *Es gibt höchstens eine klassische Lösung* u *des Ganzraumproblems aus Satz 8.6 unter der Wachstumsbedingung (8.9).*

Beweis: Seien u, v zwei Lösungen mit der Wachstumsbedingung (8.9). Da die Wärmeleitungsgleichung linear ist, ist die Differenz $w = u - v$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Auch w erfüllt die Wachstumsbedingung und es gilt $w_0 = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Nach dem Maximumprinzip, Satz 8.9, angewandt auf w und $-w$ folgt $w \equiv 0$. ∎

Die eindeutige Lösbarkeit liefert die Existenz eines Lösungsoperators, also einer Halbgruppe.

Folgerung 8.11 *Die homogene Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 \quad \textit{auf}\, \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(.,0) &= u_0 \quad \textit{auf}\, \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

erzeugt im Funktionenraum

$$X := C_b(\mathbb{R}^d) = \{v \mid v \in C(\mathbb{R}^d) \ \textit{und}\ \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty\}$$

eine Halbgruppe

$$S(t) \ : \ X \ni u_0 \mapsto u(t) \in X.$$

Es gelten

i) $S(t) \circ S(s) = S(t+s)$ *für* $t, s > 0$,

ii) $S(0) = id$,

iii) die Abbildung $[0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in X$ *ist stetig für alle* $u_0 \in X$.