Kapitel 5

Energiemethoden für elliptische Differentialgleichungen

Wir werden im weiteren vor allem partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachten.

5.1 Typeneinteilung bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(\mathbf{x})\partial_j\partial_k u + F\left(\mathbf{x}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_d u\right) = 0 \tag{5.1}$$

oder in Nabla-Notation

$$\nabla A(\mathbf{x})\nabla u + \tilde{F}\left(\mathbf{x}, u, \partial_1 u, \ldots, \partial_d u\right) = 0.$$

Eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$\sum_{j,k=1}^{d} a_{jk}(\mathbf{x})\partial_j\partial_k u + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x})u = F(\mathbf{x}).$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt $\partial_j\partial_k u = \partial_k\partial_j u$ falls u hinreichend regulär ist. Daraus folgt, dass die Gleichung (5.1) in Wirklichkeit für $\partial_j\partial_k u$ zwei Koeffizienten enthält, nämlich $a_{jk}(\mathbf{x})$ und $a_{kj}(\mathbf{x})$. Zur Eindeutigkeit legt man fest

$$a_{jk}(\mathbf{x}) = a_{kj}(\mathbf{x}).$$

Der Typ der partiellen Differentialgleichung wird durch die Koeffizientenfunktionen der zweiten Ableitungen bestimmt, die man in Matrixform schreiben kann

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1d}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{dd}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(\mathbf{x})$ ist auf Grund der obigen Festlegung symmetrisch. Damit sind alle ihre Eigenwerte reell.

Definition 5.1 Auf der Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω seien α Eigenwerte von $A(\mathbf{x})$ positiv, β negativ und γ gleich Null. Die *quasilineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung* nennt man auf der Menge $\tilde{\Omega}$ vom Typ (α, β, γ). Sie heißt

- *elliptisch* auf $\tilde{\Omega}$, wenn sie vom Typ $(d, 0, 0) = (0, d, 0)$ ist,
- *hyperbolisch* auf $\tilde{\Omega}$, wenn sie vom Typ $(d-1, 1, 0) = (1, d-1, 0)$ ist,
- *parabolisch* auf $\tilde{\Omega}$, wenn sie vom Typ $(d-1, 0, 1) = (0, d-1, 1)$ ist.

Bei linearen partiellen Differentialgleichungen sprechen wir von einer *parabolischen Gleichung*, wenn neben der obigen Bedingung noch zusätzlich

$$\mathrm{Rang}(A(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})) = d$$

in $\tilde{\Omega}$ gilt. □

Mit dieser Definition sind nicht alle Fälle abgedeckt. Die anderen Fälle sind jedoch wenig interessant.

Beispiel 5.2

1. Bei der Poisson–Gleichung sind $a_{ii} = -1 < 0$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Somit sind alle Eigenwerte von A negativ und die Poisson–Gleichung ist eine elliptische Differentialgleichung. Das gleiche gilt auch für die stationäre Wärmeleitungsgleichung (1.5).

2. Bei der Wärmeleitungsgleichung (1.7) hat man neben den partiellen Ableitungen im Ort auch noch die in der Zeit. Die zeitliche Ableitung muss man bei der Matrix A auch berücksichtigen. Da diese Ableitung nur von erster Ordnung ist, hinterlässt sie in A eine Nullzeile/-spalte. Man hat also, zum Beispiel für die Wärmeleitungsgleichung, $a_{ii} = -1 < 0, i = 2, \ldots, d+1$, $a_{11} = 0$, $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Ein Eigenwert ist somit Null und die anderen besitzen dasselbe Vorzeichen. Der Vektor im Term erster Ordnung hat die Form $\mathbf{b} = (1, 0, \ldots, 0)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$, wobei die Eins von $\partial_t u$ kommnt. Man sieht sofort, dass $(A, \mathbf{b})$ vollen Spaltenrang besitzt. Damit ist (1.7) parabolische partielle Differentialgleichung, siehe Abschnitt **??**.

3. Ein Beispiel für eine hyperbolische PDE ist die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \varepsilon^2 \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

siehe Abschnitt 1.3.4.

□

5.2 Variationsmethode und symmetrische Probleme

5.2.1 Existenz einer Lösung im Sinne der Distributionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Zum Beweis der Existenz von Lösungen soll das Dirichlet–Prinzip aus Satz 1.7 genutzt werden. Die Eindeutigkeit einer Lösung wurde ja bereits im Satz 1.8 bewiesen.

Wir definieren das Energiefunktional

$$E \;:\; V_g \to \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_\Omega \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - fu \; d\mathbf{x},$$

wobei $V_g := \{u \in H^1(\Omega) \ : \ u|_{\partial\Omega} = g\}$ (im Sinne der Spur). Angenommen, $u \in V_g$ sei Minierer dieser Energie. Als Vergleichsfunktion betrachten wir $u_\varepsilon := u + \varepsilon\varphi$ mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Diese Funktion erfüllt ebenfalls die Randbedingung, also $u_\varepsilon \in V_g$. Da die Energie in u ein Minimum annimmt, gilt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi - f\varphi \, d\mathbf{x}.$$

Insbesondere gilt diese Gleichung für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, also gilt $-\Delta u = f$ im distributionellen Sinne. Die Randbedingung ist wegen $u \in V_g$ ebenfalls erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass ein Minimum u von E existiert.

Satz 5.3 Existenz einer Lösung von (5.2). *Seien Ω beschränkt mit Lipschitz-stetigem Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und die Randwerte g gegeben als Spur einer Funktion $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert ein Minimierer u der Energie E in V_g. Der Minimierer u löst die Poisson–Gleichung (5.2) im distributionellen Sinne und die Randbedingungen sind im Sinne der Spur erfüllt.*

Beweis: Zunächst wird gezeigt, dass die Energie nach unten beschränkt ist, das heißt

$$\inf_{u \in V_g} E(u) > -\infty. \tag{5.3}$$

Das bedeutet, dass der positive erste Term die Energie dominiert.

Sei $u \in V_g$, $u = g + v$ mit der im Satz fest gewählten Funktion $g \in V_g$ und mit $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann folgt mit Cauchy–Schwarz–Ungleichung, Dreiecksungleichung, Poincaré–Ungleichung und noch einmal die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\left| \int_\Omega f u \, d\mathbf{x} \right| &\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \left(\|g\|_{L^2} + \|v\|_{L^2} \right) \\
&\leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + C_P \|f\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\
&\leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + C_P \|f\|_{L^2} \|\nabla g\|_{L^2} + C_P \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\
&= C_1(f, g) + C_2(f) \|\nabla u\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Damit gilt für die Energie

$$\begin{aligned}
E(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \left| \int_\Omega f u \, d\mathbf{x} \right| \\
&\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C_1 - C_2 \|\nabla u\|_{L^2} \\
&\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C - \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Ungleichung

$$ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2$$

mit $a = C_2$, $b = \|\nabla u\|_{L^2}$, $\varepsilon = 1/2$ verwendet. Das Quadrat in der letzten Zeile der Abschätzung für die Energie ist positiv und damit folgt (5.3). Die Energie von u kontrolliert das Quadrat der $H^1(\Omega)$–Norm von u (von oben).

Wir betrachten nun eine Minimalfolge $\{u_k\} \in V_g$, das heißt $E(u_k) \to \inf E(u)$. Falls der Raum V_g nicht leer ist, existiert solch eine Folge nach Definition des Infimums. Wir haben $g \in V_g$, also ist V_g nicht leer.

Als Lösung u von (5.2) kommt ein Limes der Folge $\{u_k\}$ in Frage. Es muss allerdings geklärt werden, in welcher Form ein solcher Limes existiert, das heißt, in welchem Funktionenraum. Dazu betrachten wir das Energiefunktional im gesamten Raum $H^1(\Omega)$. Es gilt (Parallelogrammgleichung)

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_k - u_m)\|_{L^2}^2 &= -\|\nabla(u_k + u_m)\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \\
&= -2E(u_k + u_m) - 2\int_\Omega (u_k + u_m) f \, d\mathbf{x} + 4E(u_k) \\
&\quad +4\int_\Omega u_k f \, d\mathbf{x} + 4E(u_m) + 4\int_\Omega u_m f \, d\mathbf{x} \\
&= -8E\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) + 4E(u_k) + 4E(u_m) \\
&\leq -8 \inf_{v\in V_g} E(v) + 4E(u_k) + 4E(u_m).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass nach dem Spursatz die Funktion $(u_k + u_m)/2 \in V_g$. Nach Voraussetzung konvergieren $E(u_k)$ und $E(u_m)$ gegen $\inf_{v\in V_g} E(v)$. Damit konvergiert die rechte Seite gegen Null und es folgt, mit Hilfe der Poincaré–Ungleichung

$$\|u_k - u_m\|_{H^1}^2 \leq C_P \|\nabla(u_k - u_m)\|_{L^2} \to 0,$$

da $u_k - u_m \in H_0^1(\Omega)$. Die Minimalfolge $\{u_k\}$ ist also eine Cauchy–Folge in $H^1(\Omega)$. Wegen der Vollständigkeit von $H^1(\Omega)$ besitzt sie einen Grenzwert $u \in H^1(\Omega)$. Da alle Elemente der Minimalfolge die Randbedingung g besitzen, liefert der Spursatz (Stetigkeit von γ), dass auch das Grenzelement diese Randbedingung erfüllt, also $u \in V_g$. Aus der Konvergenz in $H^1(\Omega)$ folgt die Konvergenz der Energie, also $E(u) = \inf_{v\in V_g} E(v)$.

Dass Minimierer von E die Poisson–Gleichung (5.2) lösen, wurde bereits zu Beginn dieses Abschnitts gezeigt. ■

5.2.2 Existenz einer Lösung im Sinne des Hilbert–Raumes, Darstellungssatz von Riesz

Sei V ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $a(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ und der Norm $\|v\|_V = a(v,v)^{1/2}$.

Satz 5.4 ***Riesz*[1]*scher Darstellungssatz.*** *Zu jedem stetigen linearen Funktional $f \in V'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in V$ mit*

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall\, v \in V.$$

Des weiteren ist u die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems

$$\min_{v\in V} F(v) := \min_{v\in V}\left(\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)\right)$$

Beweis: Der Beweis ähnelt demjenigen von Satz 5.3. Es werden aber nur allgemeine Eigenschaften von Hilbert–Räumen verwendet und kein konkreter Raum betrachtet.

Als erstes wird die Existenz einer Lösung u des Variationsproblems gezeigt. Wegen der Stetigkeit von f gilt die Abschätzung

$$|f(v)| \leq c\|v\|_V \quad \forall\, v \in V$$

und daher

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_V^2 - c\|v\|_V \geq -\frac{1}{2}c^2.$$

[1] Riesz

Im letzten Schritt wendet man einfach das notwendige Kriterium für ein Minimum des mittleren Ausdrucks an. Damit ist das Funktional F nach unten beschränkt und

$$d = \inf_{v \in V} F(v)$$

existiert. Sei $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, d.h, $F(v_k) \to d$ für $k \to \infty$. Im Hilbert–Raum gilt die Parallelogrammgleichung, aus welcher man

$$\|v_k - v_l\|_V^2 + \|v_k + v_l\|_V^2 = 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2$$

erhält. Es folgt, unter Nutzung der Linearität von f,

$$\begin{aligned} &\|v_k - v_l\|_V^2 \\ &= 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2 - 4\left\|\frac{v_k+v_l}{2}\right\|_V^2 - 4f(v_k) - 4f(v_l) + 8f\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right) \\ &= 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8F\left(\frac{v_k+v_l}{2}\right) \\ &\le 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8d \to 0 \end{aligned}$$

für $k, l \to \infty$. Damit ist $\{v_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy–Folge, die wegen der Vollständigkeit von V einen Grenzwert $u \in V$ besitzt. Da F stetig ist, ist $F(u) = d$ und u ist die Lösung des Variationsproblems.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass jede Lösung des Variationsproblems auch eine Lösung der Gleichung ist. Es ist, unter Nutzung der Bilinearität und Symmetrie,

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= F(u+\varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u+\varepsilon v, u+\varepsilon v) - f(u+\varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2}a(u,u) + \varepsilon a(u,v) + \frac{\varepsilon^2}{2}a(v,v) - f(u) - \varepsilon f(v) \end{aligned}$$

für alle $v \in V$. Wenn u das Variationsproblem minimiert, dann besitzt die Funktion $\Phi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Das notwendige Kriterium führt auf die Bedingung

$$0 = \Phi'(0) = a(u,v) - f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Zum Schluss wird die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen der Gleichung. Aus der Differenz der beiden Gleichungen erhält man

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Beziehung gilt speziell für $v = u_1 - u_2$ woraus $u_1 = u_2$ folgt. Die Lösung des Variationsproblems ist eindeutig auf Grund der Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung. ■

Wir betrachten zunächst die Poisson–Gleichung mit homgenen Dirichlet–Randwerten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.4}$$

und $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Definition 5.5 *Schwache Lösung.* Eine Funktion $u \in V = H_0^1(\Omega)$ wird schwache Lösung von (5.4) genannt, falls gilt

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall\, v \in V \tag{5.5}$$

mit

$$a(u,v) = (\nabla u, \nabla v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}.$$

Die Gleichung (5.5) wird schwache Formulierung von (5.4) genannt. □

Wegen der Poincare–Ungleichung gibt es eine Konstante c mit

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \le c\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Es folgt für $v \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \le \left(c\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2\right)^{1/2} \\ &\le C\,\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|v\|_{H^1(\Omega)}\,. \end{aligned}$$

Damit ist $a(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ mit der induzierten Norm

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} := a(v,v)^{1/2},$$

die zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent ist.

Nach Definition ist $H^{-1}(\Omega)$ der Raum der stetigen linearen Funktionale über $H_0^1(\Omega)$. Damit folgt aus dem Rieszschen Darstellungssatz, dass die schwache Lösung von (5.4) existiert und eindeutig ist. Des weiteren löst u das Variationsproblem

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} F(v) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(\int_\Omega \frac{1}{2}\,\|\nabla v\|_2^2 - fv\ d\mathbf{x}\right).$$

Ein Vorteil der Verallgemeinerung auf rechte Seiten $f \in H^{-1}(\Omega)$ besteht darin, dass man Randwerte g in die rechte Seite stecken kann. Man schreibt $u = g + v$ und sucht eine Funktion $v \in V = H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta v = -\Delta u + \Delta g = f + \Delta g$$

im Distributionssinne. Dies gelingt, denn für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\langle \Delta g\rangle(\varphi) = \int g\Delta\varphi\ d\mathbf{x} = -\int_\Omega \nabla g \cdot \nabla\varphi\ d\mathbf{x},$$

da das Randintegral wegen $\nabla\varphi \cdot \mathbf{n} = 0$ entfällt. Es folgt

$$|\langle \Delta g\rangle(\varphi)| \le \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)}\,\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)} \le C\,\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}\,.$$

Da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, siehe Definition 4.5, ist $\langle \Delta g\rangle(\varphi)$ für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ beschränkt. Linearität ist klar und verbunden mit der Beschränktheit folgt damit die Stetigkeit. Somit definiert Δg ein Element in $H^{-1}(\Omega)$.

Anwendung des Rieszschen Satzes auf v ergibt die Folgerung:

Folgerung 5.6 *Sei Ω beschränkt mit Lipschitz–Rand $\partial\Omega$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung von $u \in H^1(\Omega)$ von*

$$\begin{aligned} a(u,v) &= f(v) \quad \forall\ v \in H_0^1(\Omega), \\ u &= g \qquad \textit{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

5.3 Bilinearformen und Darstellungssatz von Lax–Milgram

Nun wird eine Verallgemeinerung des Rieszschen Darstellungssatzes, Satz 5.4, auf unsymmetrische Bilinearformen betrachtet. Sei $b(\cdot,\cdot)\ :\ V \times V \to \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die beschränkt

$$|b(u,v)| \le c\,\|u\|_V\,\|v\|_V \quad \text{für alle } u,v \in V, c > 0,$$

und positiv definit

$$b(u,u) \ge m\,\|u\|_V^2 \quad \text{für alle } u \in V, m > 0,$$

ist.

Satz 5.7 ***Satz von Lax*[2]*–Milgram*[3].** *Sei $b(\cdot,\cdot)\ :\ V \times V \to \mathbb{R}$ eine beschränkte und positiv definite Bilinearform auf dem Hilbert–Raum V. Zu jedem beschränkten linearen Funktional $f \in V'$ gibt es genau ein $u \in V$ mit*

$$b(u,v) = f(v) \quad \textit{für alle } v \in V. \tag{5.6}$$

Beweis: Mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes werden lineare Operatoren $T, T'\ :\ V \to V$ durch

$$a(Tu,v) = b(u,v)\ \forall\ v \in V, \quad a(T'u,v) = b(v,u)\ \forall\ v \in V \tag{5.7}$$

definiert. Da $b(u,\cdot)$ und $b(\cdot,u)$ stetige lineare Funktionale auf V sind, existieren Tu, $T'u$ und sind eindeutig bestimmt. Weil die Operatoren der Bedingung

$$a(Tu,v) = a(u,T'v)$$

genügen, wird T' der adjungierte Operator zu T genannt. Wir setzen $v = Tu$ in (5.7) und erhalten aus der Beschränktheit von $b(\cdot,\cdot)$

$$\|Tu\|_V^2 = a(Tu,Tu) = b(u,Tu) \le c\,\|u\|_V\,\|Tu\|_V \implies \|Tu\|_V \le c\,\|u\|_V$$

für alle $u \in V$. Damit ist T beschränkt. Da T linear ist *Übungsaufgabe*, ist T damit stetig. Mit dem gleichen Argument ist auch T' stetig.

Man definiert die Bilinearform

$$d(u,v) := a(TT'u,v) = a(T'u,T'v) \quad \forall\ u,v \in V.$$

Die Bilinearform $d(\cdot,\cdot)$ ist symmetrisch. Mit Hilfe der Positivität von $b(\cdot,\cdot)$ und der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhält man

$$m^2\,\|v\|_V^4 \le b(v,v)^2 = a(v,T'v)^2 \le \|v\|_V^2\,\|T'v\|_V^2 = \|v\|_V^2\,d(v,v).$$

Damit und der Beschränktheit von T' erhält man

$$m^2\,\|v\|_V^2 \le d(v,v) = a(T'v,T'v) = \|T'v\|_V^2 \le C\,\|v\|_V^2\,.$$

Demzufolge ist $d(\cdot,\cdot)$ auch positiv definit und erzeugt ein Skalarprodukt auf V. Die durch $d(v,v)^{1/2}$ erzeugte Norm ist äquivalent zu $\|v\|_V$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt nun, dass es ein $w \in V$ gibt mit

$$d(w,v) = f(v)\ \forall\ v \in V.$$

Nun ist $u = T'w$ die Lösung von (5.6), da

$$f(v) = d(w,v) = a(T(T'w),v) = b(T'w,v) \quad \forall\ v \in V.$$

Die Eindeutigkeit von u wird genauso wie im symmetrischen Fall bewiesen. *Übungsaufgabe* ∎

Nun betrachten wir das Problem

$$\begin{array}{rcll} -\nabla\cdot(A(\mathbf{x})\nabla u) + c(\mathbf{x})u & = & f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u & = & 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{array} \tag{5.8}$$

mit $A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d\times d}$ für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$. Die Koeffizienten $a_{ij}(\mathbf{x})$ und $c(\mathbf{x}) \ge 0$ werden als beschränkt vorausgesetzt. Die Matrix A wird in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ als

[2] Lax
[3] Milgram

gleichmäßig elliptisch vorausgesetzt, d.h. es gibt positive Konstanten m und M, so dass

$$m \|\mathbf{y}\|_2^2 \le \mathbf{y}^T A(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{y}^T A(\mathbf{x})^T \mathbf{y} \le M \|\mathbf{y}\|_2^2 \quad \forall\, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \text{ und } \forall\, \mathbf{x} \in \overline{\Omega}.$$

Die schwache Form von (5.8) wird auf die übliche Art und Weise gewonnen, indem man (5.8) mit Testfunktionen $v \in H_0^1(\Omega)$ multipliziert, über Ω integriert und partielle Integration anwendet um Ableitungen auf die Testfunktion zu übertragen: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$a(u,v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

mit

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T \nabla v(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}, \\ f(v) &= \int_\Omega f(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Diese Bilinearform ist beschränkt: *Übungsaufgabe* Die positive Definitheit erhält man aus der gleichmäßigen Elliptizität von $A(\mathbf{x})$ und der Nichtnegativität von $c(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})u(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} \\ &\ge \int_\Omega m \nabla u(\mathbf{x})^T \nabla u(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = m \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 . \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Lax–Milgram folgt nun die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung von (5.8). Im unsymmetrischen Fall, $a_{ij} \ne a_{ji}$, kann diese Lösung allerdings nicht durch ein Variationsproblem charakterisiert werden.

5.4 Weitere Eigenschaften

5.4.1 Das Neumann–Problem

Im Neumann–Problem hat man Randdaten für die Normalenableitung der Lösung vorgegeben. Wir betrachten als einfachsten Fall das Poisson–Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= h \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei $\mathbf{n}$ die Einheitsaußennormale an $\partial\Omega$ ist. Man sieht sofort, dass die Lösung dieser Gleichung nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Man braucht noch eine Zusatzbedingung zur Festlegung der Konstanten, zum Beispiel sucht man die Lösung nur unter denjenigen Funktionen mit Mittelwert 0:

$$⨍_\Omega u\ d\mathbf{x} = 0.$$

Wir wollen das Neumann–Problem (5.9) im Rahmen der Theorie von Lax–Milgram behandeln. Formales Testen, das heißt Multiplikation von (5.9) mit einer Testfunktion v und anschließende partielle Integration, liefert

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ d\mathbf{x} - \int_\Gamma hv\ d\mathbf{s} = \int_\Omega fv\ d\mathbf{x}.$$

Das ist eine Bilinearform. Gemäß der obigen Bemerkung wählen wir als Raum für die Lösung

$$V_N := \left\{ v \in H^1(\Omega) \ : \ \fint_\Omega v \ d\mathbf{x} = 0. \right\}.$$

Dieser Raum wird mit der Norm und dem Skalarprodukt von $H^1(\Omega)$ ausgestattet, womit V_N ein Hilbert–Raum wird. Als Bilinearform und rechte Seite werden

$$\begin{aligned} a(u,v) &:= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ d\mathbf{x}, \\ \langle F \rangle(v) &:= \int_\Omega fv \ d\mathbf{x} + \int_\Gamma hv \ d\mathbf{s} \end{aligned}$$

genommen. Nach dem Spursatz ist für $h \in L^2(\Gamma)$ die Form $\langle F \rangle$ stetig auf V_N. Aus Lemma 4.15 erhält man, dass für beschränkte Gebiete eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|v\|_{H^1} \le C \, \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall \ v \in V_N.v \ d\mathbf{x} = 0. \tag{5.10}$$

Damit definiert die Bilinearform $a(\cdot,\cdot)^{1/2}$ eine Norm auf V_N.

Der Satz von Lax–Milgram 5.7 liefert die Existenz einer Lösung $u \in V_N$ des Neumann–Problems

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \ d\mathbf{x} = \int_\Omega fv \ d\mathbf{x} + \int_\Gamma hv \ d\mathbf{s} \quad \forall \ v \in H^1(\Omega). \tag{5.11}$$

Die Gleichung (5.11) wird schwache Formulierung von (5.9) genannt. Wählt man speziell $v \in \mathcal{D}$, dann folgt $-\Delta u = f$ im Distributionssinne.

Die Neumann–Randbedingung ist im allgemeinen nicht mehr im Spursinne erfüllt (man hat $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$). Die Erfüllung im Spursinn ist erst gegeben, wenn die Lösung genügend regulär ist, dass heißt $u \in H^2(\Omega)$.

5.4.2 $H^2(\Omega)$–Regularität

An dieser Stelle soll nur ein Satz ohne Beweis zitiert werden. Wir betrachten das Problem: finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$(A\nabla u, \nabla v) + (cu, v) = (f, v) \quad \forall \ v \in H_0^1(\Omega). \tag{5.12}$$

Satz 5.8 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2,3\}$ beschränkt und $\partial\Omega$ von der Klasse C^2. Für die Koeffizienten von (5.12) gelte*

i) $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})^{d\times d}$,
ii) A sei gleichmäßig elliptisch,
iii) $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c(\mathbf{x}) \ge 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und
iv) $f \in L^2(\Omega)$.

Dann existiert genau eine Lösung u von (5.12) und es gilt sogar $u \in H^2(\Omega)$. Des weiteren gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

mit $C = C(\|\partial\Omega\|_{C^2}, \|A\|_{C^1(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)})$.

Für einen Beweis sei auf das Buch von Evans, Abschnitt 6.3, verwiesen oder auf das Buch von Grisvard [Gri85], Theorem 2.2.2.3.

Die $H^2(\Omega)$–Regularität der Lösung hat man also nur bei glatten Daten, insbesondere bei glatten Gebietsrändern. Das stellt ein Problem für die Analysis von numerischen Verfahren dar, da diese glatte Gebietsränder im allgemeinen nur approximieren können und damit ein zusätzlicher Fehler entsteht, siehe zum Beispiel Abschnitt **??**.

Für $d = 2$ kann man die Voraussetzungen abschwächen. Da reicht schon Lipschitz–Rand und konvexes Gebiet, siehe das Standardwerk über den Einfluss der Randglattheit auf die Regularität der Lösung von Grisvard [Gri85].