

Kapitel 3

Distributionen

In diesem Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, aber nicht notwendig beschränkt.

Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist ganz sicher Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$, falls $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ und die Gleichung in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ erfüllt ist. Unser Ziel besteht aber darin, einen allgemeineren Lösungsbegriff zu entwickeln, der zum Beispiel auch für rechte Seiten $f \in L^2(\Omega)$ sinnvoll ist.

Definition 3.1 *Raum der Testfunktionen \mathcal{D} .* Sei

$$\mathcal{D} := C_0^\infty(\Omega)$$

der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω . \square

Wir können eine beliebige $L^1(\Omega)$ -Funktion f auffassen als eine Linearform $\langle f \rangle$ auf dem Raum \mathcal{D} . Dabei identifiziert man f mit

$$\langle f \rangle : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x}.$$

Jedes $f \in L^1(\Omega)$ definiert eine solche Form. Streng genommen reicht dafür die sogar die lokale Integrierbarkeit, also $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Der Raum $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist der Raum der lokal integrierbaren Funktionen, d.h. für jede kompakte Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ gilt

$$\int_{\Omega'} |u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \infty \quad \forall u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Auch umgekehrt gilt, falls für $f, g \in L^1(\Omega)$ die Linearformen übereinstimmen, $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, dann gilt schon $f = g$ (im Sinne des $L^1(\Omega)$). Eine mit einer $L^1(\Omega)$ -Funktion darstellbare Linearform hat also eine eindeutige Darstellung.

Definition 3.2 *Distributionen \mathcal{D}' .* Eine Form u heißt Distribution, $u \in \mathcal{D}'$, falls

1. $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear,
2. für alle $K \subset \Omega$ mit K kompakt existieren ein $c = c(K)$ und ein $m = m(K)$ mit

$$|u(\varphi)| \leq c \|\varphi\|_{C^m} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{supp}(\varphi) \subset K. \quad (3.1)$$

\square

Eine Distribution ist also eine Form, deren Argument eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ist.

Beispiel 3.3 Für $f \in L^1(\Omega)$ ist $\langle f \rangle$ linear auf \mathcal{D} und (3.1) ist mit $c = \|f\|_{L^1}$ und $m = 0$ für alle K erfüllt:

$$|\langle f \rangle(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\varphi| \int_{\Omega} |f| \, d\mathbf{x} = \|\varphi\|_{C^0} \|f\|_{L^1}.$$

Distributionen mit dieser Darstellung heißen regulär, anderenfalls singular. \square

Beispiel 3.4 *Dirac¹-Distribution, δ -Distribution.* Für $\mathbf{a} \in \Omega$ ist die Abbildung

$$\delta_{\mathbf{a}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto \varphi(\mathbf{a}) \tag{3.2}$$

eine Distribution. Linearität ist klar, die Forderung (3.1) ist mit $m = 0$ und $c = 1$ erfüllt. (Übungsaufgabe) Dies ist eine singuläre Distribution. \square

Als nächstes wollen wir uns die Differentiation von Distributionen ansehen.

Definition 3.5 *Ableitung von Distributionen.* Für eine Distribution u und einen Richtungsvektor $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^d$ wird die Ableitung in Richtung \mathbf{e}_k , $\partial_k u$, durch

$$\partial_k u \in \mathcal{D}', \quad (\partial_k u)(\varphi) := (u(-\partial_k \varphi)). \tag{3.3}$$

definiert. \square

Man rechnet leicht nach, dass tatsächlich $\partial_k u \in \mathcal{D}'$. *Übungsaufgabe, Definition nachrechnen, (3.1) gilt mit c und $m + 1$*

Durch Iteration werden höhere Ableitungen definiert. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^d$ gilt

$$D^{\alpha} u(\varphi) = u((-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \varphi).$$

Man erkennt, dass man Distributionen beliebig oft differenzieren kann. Damit sind diese Formen geeignete Kandidaten für einen erweiterten Lösungsbegriff für Differentialgleichungen.

Sind sowohl u als auch $\partial_k u$ reguläre Distributionen, so gilt nach Definition 3.5

$$\langle \partial_k u \rangle(\varphi) = \int_{\Omega} \partial_k u \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \partial_k \varphi \, d\mathbf{x} = \langle u \rangle(-\partial_k \varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$, so wird $\partial_k u$ auch verallgemeinerte oder schwache Ableitung von u genannt. Analog spricht man von verallgemeinerten oder schwachen Ableitungen höherer Ordnung.

Wie hängt nun der Differentiationsbegriff für Distributionen mit dem gewohnten Ableitungsbegriff zusammen? Wir werden später für reguläre Distributionen nicht mehr zwischen einer Funktion f und der dazugehörigen Distribution $\langle f \rangle$ unterscheiden. Dazu muss sichergestellt werden, dass zumindest für $f \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\langle \partial_k f \rangle = \partial_k f = \partial_k \langle f \rangle.$$

Tatsächlich gilt für $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \langle \partial_k f \rangle(\varphi) &= \int_{\Omega} \partial_k f \varphi \, d\mathbf{x}, \\ \partial_k \langle f \rangle(\varphi) &= -\langle f \rangle(\partial_k \varphi) = - \int_{\Omega} f \partial_k \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_k f \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Gauß angewandt. Die Randintegrale verschwinden, da φ kompakten Träger besitzt. Beide Seiten stimmen also überein und man kann die Funktionen mit den zugehörigen Distributionen identifizieren.

¹Dirac

Beispiel 3.6 *Ableitung der Heaviside²-Funktion.* Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Es ist $\partial_x H = \delta_0$. Wir schreiben im \mathbb{R}^1 ∂_x anstelle von ∂_1 . In der obigen Formel haben wir bereits Funktion und Distribution identifiziert, denn die Heaviside-Funktion hat im klassischen Sinne keine Ableitung im Punkte $x = 0$. Diese Formel rechnet man mit Hilfe der Definition der Ableitung, der Definition der Heaviside-Funktion, partieller Integration und dem kompakten Träger der Testfunktion nach

$$\partial_x H(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \partial_x \varphi(x) dx = - \int_0^{\infty} \partial_x \varphi(x) dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

□

Beispiel 3.7 *Lösung der Transportgleichung.* Es soll gezeigt werden, dass für $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ die Funktion

$$u(x, t) = u_0(x - t)$$

in $Q := \mathbb{R} \times (0, \infty)$ die Transportgleichung

$$\partial_t u + \partial_x u = 0$$

im Sinne der Distributionen löst. Es gilt für $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ und die Funktion $\psi(x, t) := \varphi(z + t, t)$

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u + \partial_x u, \varphi \rangle &= - \int_Q u (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi) dx dt \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(x - t) (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(x, t) dx dt \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) ((\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(z + t, t)) dz dt \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \partial_t \psi(z, t) dz dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \left(\int_0^{\infty} \partial_t \psi(z, t) dt \right) dz = 0. \end{aligned}$$

In der Rechnung wurde die Definition von ψ verwendet. Das Integral in der Klammer in der letzten Zeile verschwindet (partielle Integration), da ψ einen kompakten Träger bezüglich der Zeit besitzt. □

Nun werden wir uns mit der Konvergenz von Distributionen beschäftigen.

Definition 3.8 *Konvergenz von Distributionen.* Eine Folge $\{u_j\}$ von Distributionen heißt konvergent gegen eine Distribution $u \in \mathcal{D}'$ falls

$$u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.4}$$

Wir schreiben $u_j \rightarrow u$. □

Beispiel 3.9 Für $\{\mathbf{a}_j\} \in \Omega$ mit $\mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a} \in \Omega$ gilt $\delta_{\mathbf{a}_j} \rightarrow \delta_{\mathbf{a}}$. □

²Heaviside

Beispiel 3.10 Seien $\{H_{a_j}\}$ um a_j verschobene Heaviside-Funktionen, $a_j \in \mathbb{R}$, und gelte $a_j \rightarrow a$. Dann gilt $H_{a_j} \rightarrow H_a$. Dieses Beispiel zeigt, dass die zugehörige Funktionenfolge nicht punktweise konvergieren muss. Wir haben eine schwache Konvergenz eingeführt, weil die Konvergenz nur für feste Testfunktionen gefordert wird. \square

Beispiel 3.11 Sei $u_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_k(x) = \sin(kx)$. Da $u_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, gilt $u_k \in \mathcal{D}'$. Mit partieller Integration und dem kompakten Träger der Testfunktion folgt

$$u_k(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(kx)\varphi(x) dx = -\frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} \cos(kx)\varphi'(x) dx.$$

Da das rechte Integral beschränkt ist, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\varphi) = 0,$$

das heißt $u_k \rightarrow 0$ in \mathcal{D}' . \square

Die Ableitung ∂_k einer Distribution ist stetig bezüglich der Konvergenz. Das heißt, für Distributionen $u_j \rightarrow u$ gilt $\partial_k u_j \rightarrow \partial_k u$, denn

$$\partial_k u_j(\varphi) = -u_j(\partial_k \varphi) \rightarrow -u(\partial_k \varphi) = \partial_k u(\varphi). \quad (3.5)$$

Nun betrachten wir eine Funktion $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} \psi d\mathbf{x} = 1$. Diese Funktion wird mittels eines Parameters $\varepsilon > 0$ gestaucht

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^d} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

siehe Abbildung 3.1 für ein Beispiel. Die Skalierung ist so gewählt, dass das Integral erhalten bleibt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} \psi(\mathbf{z}) \varepsilon^d d\mathbf{z} = 1.$$

Die Folge der Funktionen ψ_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ nennt man Dirac-Folge.

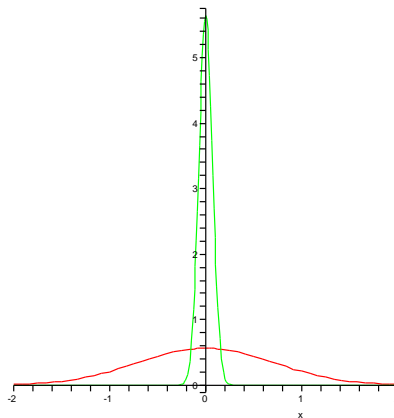


Abbildung 3.1: Die Funktion $\psi = \exp(-(x/\varepsilon)^2)/(\varepsilon\sqrt{\pi})$ für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 10$.

Satz 3.12 Für Dirac-Folgen gilt im Sinne der Distributionen

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle \rightarrow \delta_0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varepsilon^d} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Wir haben die punktweise Konvergenz $\psi(\mathbf{y})\varphi(\varepsilon \mathbf{y}) \rightarrow \psi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{0})$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Des Weiteren existiert die Majorante $\psi(\cdot)\varphi(\varepsilon \cdot) \leq M|\psi(\cdot)|$ mit $M := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\varphi|$. Damit konvergieren die Integrale und man erhält

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \rightarrow \varphi(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{0}).$$

Dies war zu zeigen. ■

In Anwendungen hat man oft eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, die man glätten möchte. Dazu wählt man eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und ersetzt den Wert von f an der Stelle \mathbf{x} durch

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) := \langle \psi_\varepsilon \rangle(f(\mathbf{x} - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (3.7)$$

Man ersetzt also $f(\mathbf{x})$ durch gewichtete Mittelwerte. Das Ergebnis ist tatsächlich eine glatte Funktion, wie man durch die Transformationsformel sieht. Man schreibt den Ausdruck als

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z}) \psi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \quad (3.8)$$

uns sieht, dass f_ε nur über die glatte Funktionen ψ_ε eine \mathbf{x} -Abhängigkeit besitzt, vergleiche auch Regularität von harmonischen Funktionen im Abschnitt 1.2.3. Der Ausdruck (3.8) besitzt wegen seiner Bedeutung einen eigenen Namen. Er wird als Faltung bezeichnet:

$$(f * \psi)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z}) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z}. \quad (3.9)$$

In dieser Vorlesung wird nicht näher auf die Theorie von Faltungen eingegangen. Es wird die Faltung (mit der obigen Symbolik) verwendet werden, falls sie wohldefiniert ist. Dies ist beispielsweise der Fall für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Faltung ist aber auch für $f \in \mathcal{D}$ und $\psi \in \mathcal{D}'$ mit Hilfe der Formel (3.7) wohldefiniert.