

Kapitel 2

Der Gaußsche Satz

Partielle Differentialgleichung sind typischerweise auf beschränkten Gebieten des $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, zu lösen. Dabei sind die Eigenschaften dieser Gebiete von Bedeutung, insbesondere die Beschaffenheit ihres Randes.

2.1 Glattheit von Gebietsrändern

Definition 2.1 Rand von der Klasse $C^{k,\alpha}$. Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und sein Rand Γ sind von der Klasse $C^{k,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, wenn für alle $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ eine Kugel $B(\mathbf{x}_0, r)$ mit $r > 0$ und eine bijektive Abbildung $\psi : B(\mathbf{x}_0, r) \rightarrow D \subset \mathbb{R}^d$ existiert mit

- 1) $\psi(B(\mathbf{x}_0, r) \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^d$,
- 2) $\psi(B(\mathbf{x}_0, r) \cap \Gamma) \subset \partial\mathbb{R}_+^d$,
- 3) $\psi \in C^{k,\alpha}(B(\mathbf{x}_0, r))$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$, Hölder-stetig.

Das heißt, Γ ist der Graph einer Funktion von $d - 1$ Veränderlichen. □

Wir werden oft voraussetzen, dass Ω zur Klasse $C^{0,1}$ gehört. Da dies bedeutet, dass die Abbildung Lipschitz¹-stetig ist, sagt man zu einem $C^{0,1}$ -Rand auch Lipschitz-Rand.

Beispiel 2.2 Beispiele und Gegenbeispiele für Lipschitz-Gebiete. Gebiete mit Lipschitz-Rand sind zum Beispiel Kugeln oder polygonal/polyhedral berandete Gebiete, bei denen das Gebiet jeweils nur auf einer Seite des Randes liegt.

Ein Gebiet, das nicht zur Klasse $C^{0,1}$ gehört ist ein Kreis mit einem Schlitz

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}.$$

□

Falls Ω beschränkt ist, ist $\partial\Omega$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Es gibt also eine Überdeckung von $\partial\Omega$ mit endlich vielen Zylindern U_1, \dots, U_m gemäß der Definition von Kompaktheit. In den folgenden Beweisen nehmen wir oft eine offene Menge U_0 hinzu, die $\Omega \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_m)$ überdeckt. Die Überdeckung wird mit (U_j) bezeichnet.

Zur Überdeckung (U_j) werden wir in Beweisen oft eine zugehörige Teilung (Zerlegung) der 1 wählen, also $m + 1$ Funktionen $\eta_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\eta_j : U_j \rightarrow [0, 1]$, mit $\sum_{j=0}^m \eta_j = 1$ auf $\bar{\Omega}$.

¹Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903)

2.2 Randintegrale

Das Ziel dieses Abschnitts besteht in der Definition von $\int_{\Gamma} f \, ds$ für $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass Γ lokal Graph einer Lipschitz-Funktion ist.

Für eine entsprechende Überdeckung von Γ mit Zylindern U_j , $j = 1, \dots, m$, wählen wir eine zugehörige Teilung der 1, η_j , und setzen

$$\int_{\Gamma} f \, ds := \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma \cap U_j} f \eta_j \, ds. \quad (2.1)$$

Damit reicht es, die Terme auf der rechten Seite zu definieren, also Integrale über Graphen.

Sei also im Folgenden U ein Zylinder $U = V \times I$ mit $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$ und $I = (a, b)$. Weiterhin sei $g : V \rightarrow I$ Lipschitz-stetig. Als Graph von g bezeichnen wir

$$\Gamma := \text{graph}(g) := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in V, y = g(\mathbf{x})\}.$$

Wir werden folgendes Resultat ohne Beweis verwenden.

Satz 2.3 Satz von Rademacher² Sei $g \in C^{0,1}(V)$ mit der Lipschitz-Norm

$$\|g\|_{\text{Lip}} := \|g\|_C + \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2}.$$

Dann ist g fast überall differenzierbar und es gilt

$$\|\nabla g\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{\text{Lip}}.$$

Beweis: Siehe zum Beispiel Evans, Abschnitt 5.8, Theorem 6. ■

Definition 2.4 Randfunktion ist messbar beziehungsweise integrierbar.

Wir nennen eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ messbar beziehungsweise integrierbar, wenn die Verkettung $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ messbar beziehungsweise integrierbar ist. Dann setzen wir

$$\int_{\Gamma} f \, ds := \int_V f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{x})\|_2^2} \, d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

□

Bemerkung 2.5 Zur Definition:

- Der Satz von Rademacher, Satz 2.3, sichert, dass das Integral von $(f \circ g) \sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{x})\|_2^2}$ existiert.
- Der Faktor $\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{x})\|_2^2}$ sorgt dafür, dass das Integral unabhängig ist von der Wahl von V und g . Das kann mit der Transformationsformel zwischen $(d-1)$ -dimensionalen Integrationsgebieten V und \tilde{V} gezeigt werden, siehe unten.

□

Die Graphenkonstruktion liefert schnell geeignete Definitionen und ist auch die im Satz von Gauß verwendete Konstruktion. Im allgemeinen ist es aber günstiger, die Integrale über allgemeine Parametrisierungen zu berechnen und nicht über Graphen.

²Hans Rademacher (1892 – 1969)

Beispiel 2.6 Für die Kreislinie $\Gamma := \partial B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ soll $\int_{\Gamma} f ds$ berechnet werden. Dabei soll Γ nicht lokal als Graph geschrieben werden. Stattdessen wird mit

$$\Phi : \tilde{V} := [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t) = (R \cos(t), R \sin(t)) \quad (2.3)$$

parametrisiert. Φ ist invertierbar als Abbildung $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \Gamma$. Das Ziel besteht darin, eine Formel der Gestalt

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\tilde{V}} f(\Phi(y))J(y) dy = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t))J(t) dt$$

zu finden. Dafür muss der richtige Faktor $J(t)$ bestimmt werden. \square

Die Bestimmung des richtigen Faktors wird jetzt allgemein untersucht. Es genügt, die Situation lokal zu betrachten. Wir nehmen also an, dass wir Γ als Graph schreiben können, $\Gamma = \text{graph}(g)$, mit $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Nun sei eine andere Parametrisierung

$$\Phi : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \tilde{V} \subset \mathbb{R}^{d-1}, \quad \Gamma = \Phi(\tilde{V})$$

gegeben. Wir fordern von Φ , dass Φ invertierbar ist auf Γ und dass die Wechselabbildung

$$\psi : V \rightarrow \tilde{V}, \quad \mathbf{x} \mapsto \Phi^{-1} \circ G, \quad G(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$$

Lipschitz-stetig ist. Es soll nun gezeigt werden, dass das Integral von f über Γ wie folgt berechnet werden kann

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\tilde{V}} (f \circ \Phi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

wobei die Jacobi³-Matrix mit D bezeichnet wird

$$(D\Phi)_{ij} := \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Wir verwenden den Transformationssatz in \mathbb{R}^{d-1} für die Wechselabbildung $\psi = \Phi^{-1} \circ G$

$$\int_{\tilde{V}} (f \circ \Phi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} d\mathbf{x} = \int_V (f \circ \Phi \circ \psi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} |\det(D\psi)| d\mathbf{x}.$$

Nun wird der Faktor im Integranden auf der rechten Seite umgeformt. Dabei werden $\det(A) = \det(A^T)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ und die Kettenregel genutzt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} |\det(D\psi)| &= \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} \sqrt{\det(D\psi^T D\psi)} \\ &= \sqrt{\det(D\psi^T D\Phi^T D\Phi D\psi)} \\ &= \sqrt{\det(D(\Phi \circ \psi)^T D(\Phi \circ \psi))} \\ &= \sqrt{\det(DG^T DG)} \\ &= \sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2}. \end{aligned}$$

Um den letzten Schritt zu verstehen, muss man sich die Struktur von $DG^T DG$ näher ansehen:

$$(DG)_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i g \implies (DG^T DG)_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i g \partial_j g,$$

³Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851)

wobei δ_{ij} das Kronecker⁴-Symbol bezeichnet. Für Matrizen der Form $I + \mathbf{a}\mathbf{a}^T$, wobei I die Einheitsmatrix der entsprechenden Dimension ist und \mathbf{a} ein entsprechender Vektor, gilt nun $\det(I + \mathbf{a}\mathbf{a}^T) = 1 + \|\mathbf{a}\|_2^2$. Anwendung auf $DG^T DG$ liefert den letzten Schritt.

Nun wird das Ergebnis in die Integraldarstellung eingesetzt und man erhält

$$\int_{\tilde{V}} (f \circ \Phi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V (f \circ G) \sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2} d\mathbf{x},$$

also Formel (2.2). Insbesondere ist damit gezeigt, dass die rechte Seite in (2.4) unabhängig vom Zylinder \tilde{V} und der Parametrisierung Φ ist.

Beispiel 2.7 *Fortsetzung von Beispiel 2.6.* Aus der Parametrisierung (2.3) der Kreislinie folgt

$$D\Phi(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))^T \implies D\Phi(t)^T D\Phi(t) = R^2 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}.$$

Die Wurzel der Determinante ist R und man erhält

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t)) R dt.$$

□

2.3 Der Satz von Gauß für glatte Integranden

Satz 2.8 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt mit einem Lipschitz-Rand und $u, v \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gelten für $i = 1, \dots, d$ und die äußere Einheitsnormale \mathbf{n} an $\partial\Omega$*

$$\int_{\Omega} \partial_i u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.5)$$

$$\int_{\Omega} u \partial_i v + \partial_i uv d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.6)$$

wobei \mathbf{e}_i der kartesische Einheitsvektor in die i -te Koordinatenrichtung ist.

Beweis: Die Formel (2.6) der partiellen Integration folgt aus (2.5) durch Einsetzen von uv und Produktregel. Der Beweis von (2.5) erfolgt in drei Schritten.

Schritt 1: Reduktion auf Graphen. Um (2.5) zu zeigen, lokalisieren wir zuerst u mit der Teilung der 1 (η_j) und schreiben

$$u = \sum_{j=0}^m \eta_j u.$$

Es reicht dann, (2.5) für Funktionen mit Träger in einem U_j zu zeigen. Hat man nämlich das lokale Ergebnis

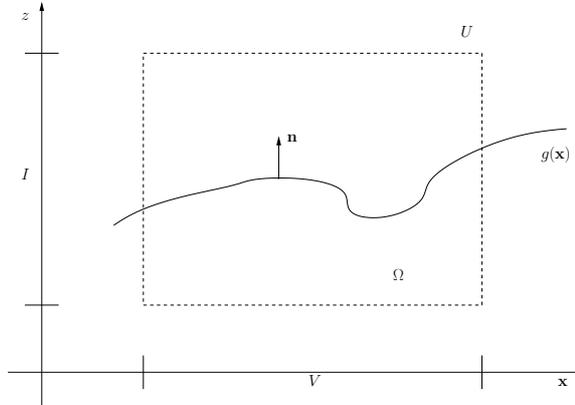
$$\int_{\Omega \cap U_j} \partial_i (u \eta_j) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega \cap U_j} u \eta_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.7)$$

⁴Leopold Kronecker (1823 – 1891)

so erhält man durch Summation, Beachtung der Träger von η_j , (2.7) und Produktregel

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^m (u\eta_j) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j=0}^m \int_{\partial\Omega \cap U_j} u\eta_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \sum_{j=0}^m \int_{\Omega \cap U_j} (\partial_i u \eta_j + u \partial_i \eta_j) \, d\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m \int_{\Omega} (\partial_i u \eta_j + u \partial_i \eta_j) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u \underbrace{\partial_i \sum_{j=0}^m \eta_j}_{=1} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_i u \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Beweis für C^1 -Graphen. Wir können also nun u mit Träger in U_j betrachten.



Für U_0 verschwindet das Integral $\int_{U_0} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}}$. (*Übungsaufgabe*) (Mit $\tilde{\mathbf{x}}$ werden jetzt die d -dimensionalen Punkte bezeichnet.)

Betrachte nun $U = U_j, 1 \leq j \leq m$. Wir haben $U = V \times I \subset \mathbb{R}^d$ mit $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $g : V \rightarrow I$ und die Punkte von Ω seien durch $\Omega = \{(\mathbf{x}, y) \in U : y < g(\mathbf{x})\}$ gekennzeichnet. Wir nehmen an, dass $g \in C^1(V)$. Die Tangentialebene im Punkt $(x_1, \dots, x_{d-1})^T$ hat die Gestalt

$$x_d = \nabla g \cdot (x_1, \dots, x_{d-1}),$$

also gilt für den Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ (Nenner ist die Normierung)

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \frac{(-\nabla g, 1)^T}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2}}.$$

Da u seinen Träger in U hat, ist $\int_{\Omega \cap U} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}}$. Transformiert man das Kurvenintegral über $\partial\Omega \cap U$ in ein Integral über V , Formel(2.2),

$$\int_{\partial\Omega \cap U} \frac{u(-\nabla g, 1)^T}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2}} \, ds = \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) (-\nabla g(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x},$$

so muss man zum Beweis von (2.7) zeigen, dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) (-\nabla g(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

gilt. Zu diesem Zweck betrachten wir eine neue Funktion $v : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$v(\mathbf{x}, z) := u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}) + z), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, z)^T.$$

Integrale von u über Ω entsprechen nun Integralen von v über $\Sigma := V \times (-\infty, 0)$, siehe obige Festlegung der Punkte von Ω . Wegen eindimensionaler partieller Integration und dem Verschwinden der Randintegrale (kompakter Träger) gilt

$$\int_{\Sigma} \partial_i v \, d\tilde{\mathbf{x}} = 0, \quad 1 \leq i \leq d-1.$$

Bei der partiellen Ableitung in Richtung \mathbf{e}_d verschwindet nur das Randintegral in $-\infty$ und man erhält

$$\int_{\Sigma} \partial_d v \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V v(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $i < d$. Mittels Kettenregel, Transformationsformel der Integrale über u und v und nochmaliger eindimensionaler partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \partial_i v \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Sigma} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_{\Sigma} \underbrace{\partial_d u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}_{\tilde{\mathbf{x}}} \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_V \left(\int_{-\infty}^0 \partial_d v(\mathbf{x}, z) \, dz \right) \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_V v(\mathbf{x}, 0) \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Das ist (2.8) für $i < d$. Für $i = d$ gilt mit der Definition von v und der Festlegung der Punkte von Ω

$$\int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_V v(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} \partial_d v \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \partial_d u \, d\tilde{\mathbf{x}}.$$

Schritt 3: Beweis für Lipschitz-Graphen. Wir approximieren ein allgemeines $g \in C^{0,1}(V)$ durch Funktionen aus $C^1(V)$. Dazu wird $p < \infty$ fixiert. Die Approximationen können so gewählt werden, dass $g_k \rightarrow g$ in $C(V)$ und $\nabla g_k \rightarrow \nabla g$ in $L^p(V)$, Existenz siehe später im Satz 4.4. Für jede Funktion g_k gilt das lokale Resultat (2.8) nach Schritt 2

$$\int_{\Omega_k} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V u(\mathbf{x}, g_k(\mathbf{x})) (-\nabla g_k(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x}$$

(lokal: u hat nur Träger in U). Für $k \rightarrow \infty$ konvergieren auf der linken Seite die Integrationsgebiete gleichmäßig und ∇u ist beschränkt. Auf der rechten Seite konvergieren $u(\cdot, g_k(\cdot)) \rightarrow u(\cdot, g(\cdot))$ ebenfalls gleichmäßig und $\nabla g_k \rightarrow \nabla g$ in $L^p(V)$. Damit können wir auf beiden Seiten zum Grenzwert übergehen und wir erhalten das lokale Ergebnis

$$\int_{\Omega} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) (-\nabla g(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x}.$$

Addition der lokalen Ergebnisse liefert nach Schritt 1 die Behauptung des Satzes. ■