FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 31.01.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 14

abzugeben vor der Vorlesung am 08.02.2007

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe :
   Man zeige, dass der in der Vorlesung definierte Interpolationsoperator $I_{\hat{K}} : C^s(\hat{K}) \to \hat{P}(\hat{K})$ linear und stetig ist, sowie, dass die Einschränkung von $I_{\hat{K}}$ auf $P(\hat{K})$ die Identität ist.

2. Aufgabe :
   Sei das Gebiet $\Omega = (0,1)^2$ mit einem Gitter aus den beiden Dreiecken mit den Eckpunkten $(0,0),(1,1),(0,1)$ und $(0,0),(1,0),(1,1)$ trianguliert. Man berechne den Fehler zwischen der Funktion

   $$v(x,y) = \sin(2x+y) + 6x^3y^2 \in C^\infty(\Omega)$$

   und ihrer Interpolierten Iv

   - im Finite–Element–Raum P_0, das Funktional ist der Wert im Schwerpunkt des Dreiecks, der Fehler in der $L^2(\Omega)$–Norm ist gesucht,
   - im Finite–Element–Raum P_1, die Funktionale sind die Werte in den Eckpunkten der Dreiecke, die Fehler in der $L^2(\Omega)$–Norm und der H^1–Seminorm sind gesucht.

3. Gegeben ist die Funktion

   $$v(x) = \begin{cases} 0.5 & x \in (0, 0.25) \\ 1 & x \in (0.25, 0.5) \\ 0 & x \in (0.5, 0.75) \\ -0.5 & x \in (0.75, 1). \end{cases}$$

   Man berechne die Clément–Interpolierte dieser Funktion in den Finite–Elemente–Raum P_1, der auf dem Gebiet $\Omega = (0,1)$ und dem Gitter mit den Knoten $\{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$ definiert ist.
   Hinweis: die Integrale mit Maple, Matematica etc. auswerten.

4. Sei P_1^{nc} der zweidimensionale Crouzeix–Raviart–Finite–Elemente–Raum mit Funktionen, die in den Seitenmittelpunkten der Kanten auf dem Rand verschwinden. Man zeige, dass

   $$\|v_h\|_h = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla v_h\|^2_{L^2(K)} \right)^{1/2}$$

eine Norm auf diesem Raum definiert.
Hinweis: Die Seminorm–Eigenschaft ist klar. Man muss zeigen, dass aus $\|v_h\|_h = 0$ auch $v_h = 0$ folgt.

Das war die letzte Übungsserie !!!