FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 20.12.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 10

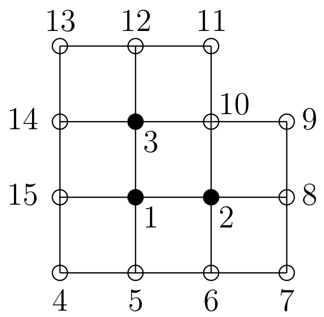
abzugeben vor der Vorlesung am 11.01.2007

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe:
   Man betrachte das Dirichlet Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

   für die Poisson Gleichung und einer entsprechenden Finite-Differenzen-Diskretisierung verbunden mit dem folgenden Gitter:



   Man berechne die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3,12}$ für die Finite-Differenzen-Gleichung

$$A\mathbf{u} = f + B\mathbf{g}$$

   mit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)^T$.

2. Aufgabe:
   Man berechne den Konsistenzfehler der folgenden Finiten–Differenzen–Approximation

$$u''(x) \sim \frac{1}{12\,h^2}\Big(-u\,(x+2\,h)+16\,u\,(x+h)-30\,u\,(x)+16\,u\,(x-h)-u\,(x-2\,h)\Big).$$

3. Aufgabe:
   Diese Aufgabe ist erst bis zum 18.01.2007 zu erledigen.
   Man schreibe ein Matlab–Programm zur Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \qquad \text{in } \Omega = (0,1)^2, \\ u &= g \qquad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

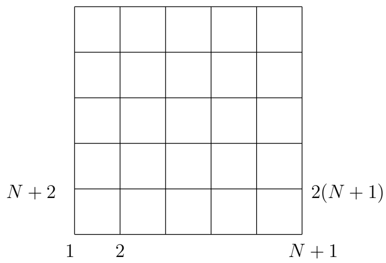
Die rechte Seite und die Randbedingungen seine so gewählt, dass

$$u\,(x,y) = x^3 y^6 + 13\cos\left(x^2 - y\right)$$

die Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung ist. Zur Diskretisierung nehme man den 5-Punkte-Finite-Differenzen-Stern. Die Gitterweite sei

$$h_x = h_y = h = 2^{-n} \quad n = 2, 3, 4, \ldots, 8.$$

Die Matrix soll im `sparse`–Format gespeichert werden. Die Knoten seien lexikographisch numeriert:



Man werte

$$\| \; u - u_h \; \|_{\ell^\infty(\omega_h)}, \qquad \| \; u - u_h \; \|_{\ell^2(\omega_h)}$$

aus.

Programmtexte können an roland@math.uni-sb.de geschickt werden.