FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 29.11.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 07

abzugeben vor der Vorlesung am 07.12.2006

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe:
   Man zeige, dass
   $$a(u,v) = \int_0^\infty e^{-x} u(x) g(x)\ dx$$
   ein (reelles) Skalarprodukt in $L^2(0,\infty)$ definiert.
   Hinweis: Eine Bilinearform $a(\cdot,\cdot)\ :\ V \times V \to \mathbb{R}$ wird (reelles) Skalarprodukt genannt, wenn sie symmetrisch und positiv definit ist:
   i) $a(\alpha u+\beta v, w) = \alpha a(u,v)+\beta a(w,v)$, $a(u,\alpha v+\beta w) = \alpha a(u,v)+\beta a(u,w)$, $\forall u,v,w \in V, \alpha,\beta \in \mathbb{R}$,
   ii) $a(u,v) = a(v,u)\ \forall u,v \in V$,
   iii) $a(u,u) \ge 0\ \forall u \in V$ und $a(u,u) = 0 \iff u = 0$.

2. Aufgabe:
   In $L^2(0,1)$ betrachte man die Bilinearform
   $$a\ :\ L^2(0,1) \times L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad a(u,v) = \int_0^1 x u(x) v(x)\ dx,$$
   das lineare Funktional
   $$f\ :\ L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad f(v) = \int_0^1 v(x)\ dx$$
   und das Funktional
   $$J\ :\ L^2(0,1) \to \mathbb{R}, \quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - f(v).$$
   a) Man zeige, dass a und f stetig sind.
   b) Man weise nach, dass das Variationsproblem
   $$J(v) \to \min$$
   keine Lösung in $L^2(0,1)$ besitzt.
   c) Welche der Voraussetzungen des Satzes von Lax–Milgram ist nicht erfüllt? Zur Begründung gebe man ein Gegenbeispiel an!

3. Aufgabe:
Sei $a\ :\ H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ die Bilinearform

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x}) \nabla v(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}.$$

mit

$$m\|y\|_2^2 \leq y^T A(\mathbf{x}) y \leq M\|y\|_2^2 \quad \text{für alle } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$$

und $c \in L^\infty(\Omega)$, $c \geq 0$. Man zeige, dass die Bilinearform beschränkt ist, d.h., dass es eine Konstante c gibt mit

$$|a(u,v)| \leq c\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall\ u, v \in H^1(\Omega).$$