FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 22.11.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 06

abzugeben vor der Vorlesung am 30.11.2006

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe:
   Sei $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Man zeige die Interpolations–Ungleichung
   $$\|\nabla u\|_{L^2}^2 \le \|u\|_{L^2} \|\Delta u\|_{L^2}.$$
2. Aufgabe:
   Man beweise die Folgerung aus der Vorlesung bezüglich der partiellen Integration: Seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $p \in (1,\infty)$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Dann gilt
   $$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}(\mathbf{x}) w(\mathbf{x})\ d\mathbf{x} = \int_\Gamma v(\mathbf{s}) w(\mathbf{s}) \mathbf{n}_i(\mathbf{s})\ d\mathbf{s} - \int_\Omega v(\mathbf{x}) \frac{\partial w}{\partial x_i}(\mathbf{x})\ d\mathbf{x}.$$
3. Aufgabe:
   Man beweise: Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $k \ge 0$ und $p, q \in [1,\infty]$ mit $q > p$. Dann gilt $W^{k,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.
4. Aufgabe:
   Man klassifiziere die partielle Differentialgleichungen:
   $$\begin{aligned} u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + 4u_{yz} + 5u_{zz} + u_x + u_y &= 0, & (3d)\,, \\ e^z u_{xy} - u_{xx} - \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right) &= 0, & (3d)\,, \\ u_{xx} + 4u_{xy} + 3u_{yy} + 3u_x - u_y + 2u &= 0, & (2d)\,, \\ au_{xx} + 2au_{xy} + au_{yy} + bu_x + cu_y + u &= 0, & (2d)\,. \end{aligned}$$