FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 15.11.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 05

abzugeben vor der Vorlesung am 23.11.2006

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe :
   Sei $r \in [1, \infty)$, $p, q \in (1, \infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $u \in L^{rp}(\Omega)$, $v \in L^{rq}(\Omega)$. Man zeige
   $$\| u\, v \|_{L^r} \le \| u \|_{L^{rp}} \| v \|_{L^{rq}} .$$

2. Aufgabe :
   Man finde die Werte $a \in \mathbb{R}$, für welche die Funktion $f : B(\mathbf{0}, 1) \to \mathbb{R}$, $B(\mathbf{0}, 1) \subset \mathbb{R}^d$, $d \ge 1$, mit
   $$f(x) = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|_2^a & \mathbf{x} \ne \mathbf{0}, \\ 0 & \mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases}$$
   ein Element von $L^p(B(\mathbf{0}, 1))$ mit $p \in [1, \infty]$ ist ?

3. Man zeige, dass die folgenden Normen äquivalent zur Standardnorm des Raumes $W^{1,p}(\Omega)$ sind:
   $$\begin{aligned} \text{a)} \quad \|u\|_{W^{1,p}}^* &= \left(\left| \int_\Omega u \, d\mathbf{x} \right|^p + |u|_{W^{1,p}}^p \right)^{1/p}, \\ \text{b)} \quad \|u\|_{W^{1,p}}^* &= \left(\left| \int_\Gamma u \, d\mathbf{s} \right|^p + |u|_{W^{1,p}}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$