FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 19.10.2006

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 01

abzugeben vor der Vorlesung am 26.10.2006

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe :
   Man berechne den Laplace-Operator

   $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

   in Kugelkoordinaten.

2. Aufgabe :
   Man überprüfe, ob die folgenden Funktionen harmonisch sind:

   $$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) &= e^x \cos(y)\, z, \\ f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) &= \ln\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right), \\ f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x,y) &= \sin(x)\cosh(y). \end{aligned}$$

3. Aufgabe :
   Gegeben sei die harmonische Funktion $u \in C^2(\Omega)$,

   $$u(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2, \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

   Man zeige durch explites Nachrechnen, dass u die Mittelwerteigenschaft für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ erfüllt.