



Saarbrücken, 27.01.2009

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 22.10.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
<http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre1.html>
abrufbar

Serie 13 (letzte Serie)

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 04.02.2009

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Einschrittverfahren

1. Das klassische Runge–Kutta–Verfahren ist ein Verfahren vierter Ordnung. Man zeige, dass es kein eingebettetes Verfahren dritter Ordnung gibt, welches mit den gleichen Steigungen auskommt.
Hinweis: Bedingungen für Verfahren dritter Ordnung kontrollieren. **4 Punkte**
2. Betrachte das Anfangswertproblem zum linearen System von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

$$\mathbf{y}'(x) = A\mathbf{y}(x), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Die Matrix A besitze n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. Man zeige, dass die Lösung dieses Anfangswertproblems in der Form

$$\mathbf{y}(x) = \sum_{i=1}^n (Q^{-1}\mathbf{y}_0)_i e^{\lambda_i x} \mathbf{v}_i$$

geschrieben werden kann, wobei \mathbf{v}_i , $i = 1, \dots, n$, die Eigenvektoren von A sind und $Q = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$.

Hinweis: Lineare Algebra.

4 Punkte

3. Betrachte das Verfahren

$$\begin{aligned}(I - ahJ) K_1 &= f(y_k), \quad a = \frac{1}{2 + \sqrt{2}}, \\(I - ahJ) K_2 &= f\left(y_k + \frac{1}{2}hK_1\right) - ahJK_1, \\y_{k+1} &= y_k + hK_2\end{aligned}$$

mit $J = f_y(y_k) = f'(y_k)$. Man zeige, dass

$$R(z) = \frac{1 + (1 - 2a)z}{(1 - az)^2}.$$

die Stabilitätsfunktion dieses Verfahrens ist, für hinreichend kleine Schrittweite h .

Hinweis: Es reicht aus, eine autonome Gleichung zu betrachten. Dann Anwendung des Verfahrens auf das übliche Test-Anfangswertproblem. **4 Punkte**

Mehrschrittverfahren

4. Man leite das 3-Schritt Adams-Bashforth-Verfahren ($q = 3$) her. **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !