FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 26.11.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Theorie und Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 22.10.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre1.html`
  abrufbar

Serie 07

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 10.12.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Integrierbare Typen gewöhnlicher Differentialgleichungen

1. Man finde die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x)(1+xy(x))dx - xdy = 0,$$

a) als Stammfunktion einer exakten Differentialgleichung,
b) durch Umformung und Zurückführung auf einen bekannten Typ einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1.Ordnung.

4 Punkte

2. Man löse die gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$\begin{array}{llcll} \text{a)} & y'(x)+y^2(x) & = & x^{-4} & \text{Ansatz} : y(x) = x^{-1} + x^{-2}w(t) \\ & & & & \quad \text{mit } t = x \text{ oder } t = 1/x, \\ \text{b)} & xy'(x)+3y(x)+y^2(x) & = & x^2 & \text{Ansatz} : (y+3)(xz(t)-1) = x^2 \\ & & & & \quad \text{mit } t = x^2. \end{array}$$

4 Punkte

Allgemeine Existenz– und Eindeutigkeitssätze

3. Man berechne die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned}(1+x)y'(x)+y(x) &= (1+x)^{-1},\\ y(0) &= 1.\end{aligned}$$

   a) Nach dem Iterationsverfahren von Picard–Lindelöf (ersten vier Koeffizienten). Dafür kann ein MAPLE– oder MATHEMATICA–Programm geschrieben werden.

   b) Nach dem Eulerschen Polygonzugverfahren mit den Schrittweiten $h_1 = 0.2$ und $h_2 = 0.1$ (jeweils 10 Schritte). Dafür kann ein MATLAB–Programm geschrieben werden.

   Man berechne den Fehler aller Approximationen zur analytischen Lösung

$$y(x) = \frac{\ln(x+1)+1}{1+x}$$

   für $x = 0.5$. **4 Punkte**

4. *Zur stetigen Abhängigkeit der Lösung eines linearen Anfangswertproblems von den Anfangswerten.* Man finde die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = 10\left(y(x) - \frac{x^2}{1+x^2}\right) + \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad y(0) = 0.$$

   Nun finde man die Lösung des Anfangswertproblems für die gleiche Differentialgleichung mit dem Anfangswert

$$y(0) = \varepsilon.$$

   Man gebe den Fehler zwischen der Lösung des ursprünglichen und des gestörten Anfangswertproblems für $x \in \{0.1, 0.5, 1, 2\}$ und $\varepsilon = 10^{-10}$ an.

   Dieses Beispiel demonstriert, dass die Lösung zwar stetig von den Anfangswerten abhängt, Satz 3.24, aber der Fehler in ausreichender Entfernung vom Anfangspunkt beliebig groß werden kann. **4 Punkte**

Gewertet werden nur Lösungen mit vollständigem Lösungsweg, bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !