FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 12.06.2008

Theoretische Übungsaufgaben zur Vorlesung Praktische Mathematik

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

Serie 08

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 25.06.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Man finde alle Lösungen der folgenden nichtlinearen Probleme.

   (a) Man finde die Schnittpunkte der Ellipse
   $$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$$
   mit der Geraden $x - 2y + 4 = 0$.

   (b) Man finde alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt
   $$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sin x}.$$

   (c) Man finde alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt
   $$\log_3 x + \log_{\sqrt{x}} x + \log_{1/3} x = 6.$$

   (d) Man finde alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt
   $$\log_x 5 + \log_5 x = 2.$$

4 Punkte

2. Seien $f \in C^m([a,b])$ und $\alpha \in (a,b)$ eine m–fache Wurzel von

$$f(x) - d = 0.$$

Man zeige, dass für die Kondition dieses Problems gilt

$$K(\delta d, d) \approx \left|\frac{m!\ \delta d}{f_1^{(m)}(\alpha)}\right|^{1/m} \frac{1}{|\delta d|} = \left|\frac{m!}{f_1^{(m)}(\alpha)}\right|^{1/m} |\delta d|^{1/m-1}.$$

Hinweise: Mit Kondition ist der Skalierungsfaktor zwischen Datenfehlern und Fehler im Ergebnis gemeint, siehe Bemerkung 3.3. Man verwende die Taylor–Entwicklung von $f(x)$ in α und approximiere den Term mit der unbekannten Zwischenstelle durch dem gleichen Term an der Stelle α. **4 Punkte**

3. Erfüllt die Fixpunktgleichung

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{2} + \frac{\cos^2(x)}{4} = x, \quad x \in [0,1],$$

die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes ? Man forme die Fixpunktgleichung äquivalent in eine Nullstellengleichung um. **4 Punkte**

4. Sei $f \in C^1([a,b])$ eine Funktion, die die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt. Man beweise, dass die Fixpunktiteration angewandt auf $f(x)$ mindestens linear mit dem Konvergenzfaktor L (Lipschitz–Konstante von $f(x)$) konvergiert:

$$\frac{|\alpha - x^{(k)}|}{|\alpha - x^{(k-1)}|} \leq L.$$

Hinweis: Man verwende die Taylorentwicklung von $f(x)$ Dann braucht man noch die Formel für die Lipschitz–Konstante bei stetig differenzierbaren Funktionen.

4 Punkte