FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 29.05.2008

Theoretische Übungsaufgaben zur Vorlesung Praktische Mathematik

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

Serie 06

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 11.06.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Die Iterationsmatrix des gedämpften Jacobi-Verfahrens ist $G(\omega) = I - \omega D^{-1}A$. Es folgt, dass wenn λ ein Eigenwert von $G(1)$ ist, dann ist $\mu = 1 - \omega(1 - \lambda)$ ein Eigenwert von $G(\omega)$. Man betrachte den Fall, dass alle Eigenwerte reell sind und
$$\lambda_{\min}(G(1)) < -1 < \lambda_{\max}(G(1)) < 1.$$
Nach dem Satz in der Vorlesung gibt es damit Startwerte, für die das Jacobi-Verfahren ($\omega = 1$) nicht konvergiert. Wie muss man ω wählen, damit das gedämpfte Jacobi-Verfahren für alle Startwerte konvergiert? **4 Punkte**

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Man zeige für die Spektralkonditionszahl
$$\kappa_2(A^TA) = (\kappa_2(A))^2.$$
Hinweis: Wie in Serie 3, Aufg. 3, nutze man die Beziehungen zwischen den Eigenwerten einer symmetrisch positiv definiten Matrix und ihres Quadrates. **4 Punkte**

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Die verallgemeinerte Inverse $A^+ \in \mathbb{R}^{n\times m}$ von A ist eindeutig durch die sogenannten Moore–Penrose–Bedingungen bestimmt:
$$AA^+A = A,\ A^+AA^+ = A^+,\ (AA^+)^T = AA^+,\ (A^+A)^T = A^+A.$$
Man berechne mit Hilfe dieser Bedingungen die verallgemeinerte Inverse von $A = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^{1\times 3}$. **4 Punkte**

4. Man beweise die Eigenschaften der Householder–Transformation aus Lemma 5.15. **4 Punkte**