FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 22.05.2008

Theoretische Übungsaufgaben zur Vorlesung
Praktische Mathematik

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

Serie 05

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 04.06.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine streng diagonaldominante Matrix, das heißt es gilt
$$a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n.$$
Man zeige, dass das Gaußsche Verfahren ohne Pivotisierung durchführbar ist.
Hinweis: Man zeige, dass man nach einem Schritt des Gaußschen Verfahrens eine diagonaldominante Restmatrix erhält. Dafür reicht es, den ersten Schritt zu betrachten.

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine strikt diagonaldominante Bandmatrix mit Bandbreite l, das heißt es gelten
$$a_{ij} = 0 \quad \text{für} \quad |i-j| > l$$
und
$$a_{ii} > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \text{für alle} \quad i = 1, \ldots, n.$$
Man weise nach, dass die Faktoren U und R der LU–Zerlegung von A, die ohne Pivotisierung durchgeführt wurde, ebenfalls Bandbreite l besitzen. **4 Punkte**

3. Es wird die gleiche Situation wie in Aufgabe 2 betrachtet. Man zeige, dass zur Berechnung der LU–Zerlegung l^2n Multiplikationen bzw. Divisionen benötigt werden. **4 Punkte**

4. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrisch positiv definite Matrix. Man betrachte für $1 \leq p \leq n$ den oberen $p \times p$–Block von A, der mit A_{11} bezeichnet wird

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{p \times p}.$$

Man zeige, dass A_{11} eine s.p.d. Matrix ist. **4 Punkte**