FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 29.05.2008

Praktische Übungsaufgaben zur Vorlesung
Praktische Mathematik

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

Serie 04

Die Lösungen werden in der praktischen Übung in der Woche vom 16.–20.06.2008 besprochen und abgegeben.

Alle Programme sind mit MATLAB zu erstellen.

Die Einlesedatei `spd_matrix.mat` kann von der Homepage der Vorlesung geladen werden.

1. Man programmiere das Cholesky–Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit symmetrisch positiv definiter Matrix A. Man berechne damit die Lösung dieses Systems, wobei A und $\mathbf{b}$ mit `spd_matrix.mat` eingelesen wurden. **4 Punkte**

2. Man programmiere das gedämpfte Jacobi–Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei A und $\mathbf{b}$ mit `spd_matrix.mat` eingelesen werden. Man teste dieses Verfahren für folgende Parameter:
   - Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = 0$,
   - Abbruch der Iteration falls $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-9}$ oder nach maximal 10000 Iterationen,
   - Dämpfungsparameter $\omega \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$.

   Für alle Dämpfungsparameter überprüfe man, ob das Verfahren konvergiert und in diesen Fällen gebe man die Anzahl der Iterationen an. **4 Punkte**

3. Man programmiere das SOR–Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei A und $\mathbf{b}$ mit `spd_matrix.mat` eingelesen werden. Man teste dieses Verfahren für folgende Parameter:
   - Startvektor $\mathbf{x}^{(0)} = 0$,

- Abbruch der Iteration falls $\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\| < 10^{-9}$ oder nach maximal 10000 Iterationen,
- Relaxationsparameter $\omega \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 1.9\}$.

Für alle Relaxationsparameter gebe man die Anzahl der Iterationen an.

4 Punkte

4. Das Verfahren der konjugierten Gradienten (conjugate gradient method, CG–Verfahren) ist ein Iterationsverfahren zur Lösung von Gleichungssystemen mit symmetrisch positiv definiter Matrix. Es ist besser als die in der Vorlesung angegebenen klassischen Iterationsverfahren.

   Das CG–Verfahren hat folgende Gestalt:

   Initialisierung: $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch und positiv definit

   wähle beliebiges $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, $r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$, $d^{(0)} = r^{(0)}$
   `for` $k = 0, 1, 2, \ldots$ `do`

$$\begin{array}{rcll}
\alpha_k &=& \|r^{(k)}\|_2^2 / d^{(k)} * Ad^{(k)} & \%Ad^{(k)} \quad \text{für später abspeichern} \\
x^{(k+1)} &=& x^{(k)} + \alpha_k d^{(k)} & \\
r^{(k+1)} &=& r^{(k)} - \alpha_k Ad^{(k)} & \\
\beta_k &=& \|r^{(k+1)}\|_2^2 / \|r^{(k)}\|_2^2 & \% \quad \|r^{(k+1)}\|_2^2 \quad \text{für später abspeichern} \\
d^{(k+1)} &=& r^{(k+1)} + \beta_k d^{(k)} &
\end{array}$$

   ```
   until stop                    % end for
   ```

   Ergebnis:
   $x^{(k)}$ ist die Approximation von $A^{-1}b$, $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ das zugehörige Residuum. Man bricht die Iteration ab, wenn $\beta_k < tol$ ist.

   Man programmiere dieses Verfahren und gebe die Anzahl der Iterationen an, die zur Lösung von $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ nötig sind, wobei die Matrix und die rechte Seite mit `spd_matrix.mat` eingelesen wurden und $tol = 10^{-9}$ gesetzt wurde.

   4 Punkte