Kapitel 1

Einleitung

In diesem Abschnitt wird die Optimierung von Funktionen

$$\min_{\mathbf{x}\in\Omega} \{f(\mathbf{x})\}$$

betrachtet, wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Menge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion ist. Die Funktion f heißt Zielfunktion und Ω sei durch endlich viele Nebenbedingungen beschrieben. Bei den betrachteten Problemen können sowohl die Zielfunktion als auch die Nebenbedingungen nichtlinear sein.

Beispiel 1.1 *Ausgleichsrechnung.* Ein konkretes Beispiel für einen Aufgabe der Nichtlinearen Optimierung ist die Ausgleichsrechnung. Zur mathematischen Formulierung von Gesetzmäßigkeiten, die ein technisches oder physikalisches Phänomen beschreiben, wird häufig eine Hypothese über den möglichen funktionalen Zusammenhang bekannter und beobachteter Variablen formuliert. Diese enthält im allgemeinen noch freie Parameter und hat etwa die Gestalt

$$z = g(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^p.$$

In diesem Modell ist $\boldsymbol{\lambda}$ ein unbekannter Parametervektor mit p Komponenten und z ist eine Variable, deren Abhängigkeit modelliert werden soll.

Nach Auswertung von m Experimenten kennt man m Paare von Variablenwerten $(z_i, \mathbf{x}_i)$, die unter Berücksichtigung möglicher Beobachtungsfehler ε_i die funktionale Abhängigkeit annähernd erfüllen sollen. Das heißt, bei passenden Parametern muss gelten

$$z_i = g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}) + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Um möglichst kleine Abweichungen ε_i zu erhalten, versucht man, die unbekannten Parameter $\boldsymbol{\lambda}$ optimal anzupassen, indem man entsprechende Optimierungsaufgaben löst, zum Beispiel

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^m (z_i - g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}))^2$$

(Methode der kleinsten Quadrate) oder

$$\min_{\boldsymbol{\lambda}\in\mathbb{R}^p} \sum_{i=1}^m \omega_i \left| z_i - g(\mathbf{x}_i, \boldsymbol{\lambda}) \right|^r,$$

wobei $r \geq 1$ eine ganze Zahl ist und $\boldsymbol{\omega} \geq \mathbf{0}$. □

Beispiel 1.2 *Standortplanung.* Eine Firma möchte n neue Lager der Kapazität a_i, $i = 1, \ldots, n$, errichten. Gegeben sind die Standorte der Abnehmer (α_j, β_j) sowie der Bedarf b_j, $j = 1, \ldots, m$. In einigen Gebieten darf zudem nicht gebaut werden (ε_k–Umgebungen von (γ_k, δ_k), $k = 1, \ldots, p$).

Gesucht sind die Standorte der Lager (x_i, y_i), die den Lieferplan z optimieren. Mit den Bezeichnungen

- z_{ij} – Transportmenge vom Lager i zum Abnehmer j,
- d_{ij} – Entfernung Lager i und Abnehmer j,
- Δ_{ik} – Entfernung Lager i zum Mittelpunkt (γ_k, δ_k) der Verbotszone k,

lautet die Optimierungsaufgabe wie folgt:

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d_{ij} z_{ij} & \to & \min\ ! \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} z_{ij} & \leq & a_i, \quad i = 1, \ldots, n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} z_{ij} & = & b_j, \quad j = 1, \ldots, m \\ \Delta_{ik} & \geq & \varepsilon_k, \quad i = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, p, \\ z_{ij} & \geq & 0, \quad i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Diese Aufgabe kann für verschiedene Entfernungsmaße gestellt werden, etwa für

$$d_{ij} = |x_i - \alpha_j| + |y_i - \beta_j|$$

oder die Euklidische Entfernung

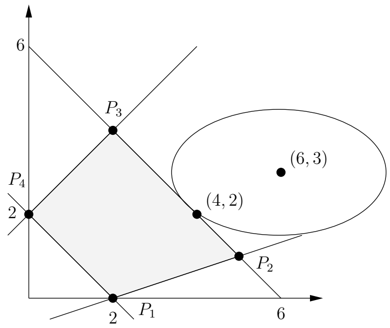
$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - \alpha_j)^2 + (y_i - \beta_j)^2}.$$

Wird sowohl für d_{ij} als auch für Δ_{ik} die Euklidische Entfernung gewählt, so erhält man eine Optimierungsaufgabe mit quadratischer Zielfunktion und quadratischen Nebenbedingungen. □

Beispiel 1.3 *Quadratische Zielfunktion über konvexem Polyeder.* Wir betrachten ein nichtlineares Programm mit quadratischer Zielfunktion und linearen Nebenbedingungen:

$$\begin{array}{rcl} z = (x_1 - 6)^2 + 2\,(x_2 - 3)^2 & \to & \min\ ! \\ x_1 + x_2 & \geq & 2 \\ x_1 - x_2 & \geq & -2 \\ x_1 + x_2 & \leq & 6 \\ x_1 - 3x_2 & \leq & 2 \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array}$$

Durch die Zielfunktion werden konzentrische Ellipsen mit Mittelpunkt $(6, 3)^T$ beschrieben. Die optimale Lösung ist ein Punkt auf dem Rand $\partial\Omega$ von Ω, aber kein Eckpunkt: $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (4, 2)^T, z_{\text{opt}} = 6.$



Betrachtet man eine andere Zielfunktion

$$z = (x_1 - 2)^2 + 2\,(x_2 - 2)^2 \to \min\ !,$$

dann ist das Optimum offensichtlich $\mathbf{x}_{\text{opt}} = (2,2)^T$, $z_{\text{opt}} = 0$. Damit liegt das Optimum im Inneren von Ω.

Eine andere quadratische Zielfunktion ist

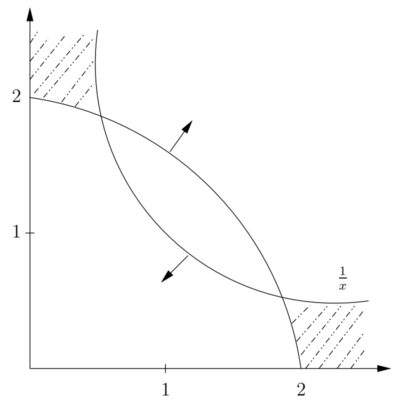
$$z = 2\,(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 \to \max\ !$$

Bei dieser Zielfunktion gibt es eine Ellipse, die gleichzeitig durch P_1 und P_3 geht. Beide Eckpunkte von Ω sind lokales Maximum mit $z = 4$. Ein weiteres lokales Maximum erhält man in P_4 mit $z = 8$. Das globale Maximum wird jedoch in P_2 mit $z = 19$ angenommen. Ein simplexartiges Vorgehen, wobei man von Eckpunkt zu Eckpunkt geht und in jedem Schritt den Zielfunktionswert verbessert (vergrößert), d.h. $P_1 \to P_4$ oder $P_3 \to P_4$ führt hier nicht zum Ziel. □

Beispiel 1.4 *Unzusammenhängender zulässiger Bereich.* Der zulässige Bereich Ω sei definiert durch

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &\geq 4 \\ x_1 x_2 &\leq 1 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Der zulässige Bereich besteht aus zwei getrennt liegenden Teilen. Beide sind nicht konvex. Selbst bei einer linearen Zielfunktion können lokale Minima auftreten, die keine globalen sind.



□

In der Vorlesung werden u.a. folgende Problemklassen innerhalb der nichtlinearen Programme nicht betrachtet:

- mehrere Zielfunktionen,
- unendlich viele Nebenbedingungen (semi–infinite Programme),
- stochastische Daten (stochastische Optimierung).