Kapitel 11

Die duale Simplexmethode zur Lösung rein ganzzahliger linearer Programme

Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\;\to\; \min\,! \\
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} && (11.1)\\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0} && (11.2)\\
x_j &\quad \text{ganz für } j = 1,\ldots,n_1 \leq n, && (11.3)\\
a_{ij}, b_i &\quad \text{ganz für } i = 1,\ldots,m,\ j = 1,\ldots,n. && (11.4)
\end{aligned}
$$

Definition 11.1 Ganzzahliges lineares Programm. Das lineare Programm (11.1) – (11.4) heißt rein ganzzahliges lineares Programm falls $n_1 = n$. Ansonsten heißt es für $n_1 > 0$ gemischt ganzzahliges lineares Programm. □

Wir werden nur rein ganzzahlige lineare Programme betrachten.

Bemerkung 11.2 Häufig enthalten ganzzahlige lineare Programme Bedingungen der folgenden Art

$$0 \leq x_j \leq 1, \quad x_j \text{ ganz},$$

für gewisse Indizes j. □

Beispiel 11.3 Wir betrachten

$$
\begin{aligned}
z = -8x_1 - 4x_2 &\;\to\; \min\,! \\
-2x_1 + 3x_2 &\leq 6\\
8x_1 + 3x_2 &\leq 20\\
\mathbf{x} &\geq 0\\
x_1, x_2 &\quad \text{ganz.}
\end{aligned}
$$

Das Problem ohne die Ganzheitsforderung kann man graphisch lösen, siehe Abbildung 11.1.

Das stetige Optimum ist

$$\mathbf{x} = \left(\frac{7}{5}, \frac{44}{15}\right), \quad z = -\frac{344}{15}.$$

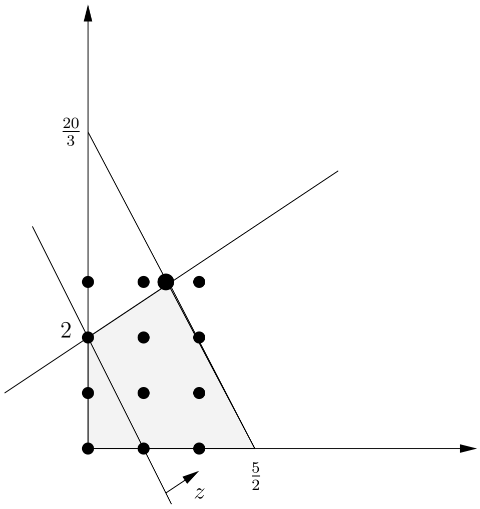

Abbildung 11.1: Illustration zu Beispiel 11.3.

Eine einfache Idee zur Bestimmung des ganzzahligen Optimums ist Runden. Man erhält damit $\mathbf{x} = (1,3)^T$. Dieser Punkt ist jedoch nicht zulässig. Durch Abrunden folgt $\mathbf{x} = (1,2)^T$. Man erhält mit diesem Punkt den Zielfunktionswert $z = -16$. Dieser ist jedoch nicht optimal, da man mit $\mathbf{x} = (2,1)^T$ den Wert $z = -20$ erhält.

Runden ist also keine geeignete Lösungstechnik. □

Mit dem normalen Simplexverfahren kann man nicht arbeiten, da das Optimum ein innerer Punkt des zulässigen Bereiches ist. Das könnte man durch die Bestimmung der konvexen Hülle aller zulässigen Punkte ändern. Dieses Vorgehen ist aber im allgemeinen viel zu aufwendig. Stattdessen versucht man in der Nähe des stetigen Optimums durch Abschneiden den gesuchten ganzzahligen optimalen Punkt zu einem Eckpunkt zu machen. Dieses Schnittprinzip soll jetzt auf eine Art (nach Gomory (1957)) realisiert werden.

Definition 11.4 Schnittbedingung. Die Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \le \beta \tag{11.5}$$

heißt Schnittbedingung, wenn folgendes erfüllt ist:

i) Es sei $\mathbf{x}^{(0)}$ ein Optimum mit den Nebenbedingungen (11.1) – (11.2), aber nicht (11.3). Dann erfüllt $\mathbf{x}^{(0)}$ die Bedingung (11.5) nicht, das heißt

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^{(0)} > \beta.$$

ii) Jede Lösung, welchedie Nebenbedingungen (11.1) – (11.3) erfüllt, erfüllt auch (11.5), das heißt

$$\{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \text{ erfüllt } \ (11.1) - (11.3)\} \subset \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \text{ erfüllt } \ (11.5)\}.$$

□

Mit Hilfe der Schnittbedingung soll der zulässige Bereich verkleinert werden (eine Ecke wird abgeschnitten) ohne dass damit ganzzahlige Lösungen abgeschnitten werden.

Jetzt soll (11.1) – (11.4) durch die Einführung von Schnittbedingungen gelöst werden. Es sei dazu zuerst (11.1) – (11.2) mit Hilfe der Simplexmethode gelöst. Das Optimum sei $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0, \ldots, 0)^T$. Dabei sei wenigstens ein $x_i^{(0)}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, nicht ganz.

Sei $A_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ die Matrix der Basisvektoren. Die Auflösung von (11.1) nach den Basisvariablen liefert für jedes zulässige $\mathbf{x}$ die Darstellung

$$x_i = \alpha_i + \alpha_{i,m+1}(-x_{m+1}) + \ldots + \alpha_{i,n}(-x_n), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{11.6}$$

Lemma 11.5 *Die Koeffizienten von (11.6) sind die Koeffizienten einer optimalen Simplextabelle.*

Beweis: Wir betrachten die Nebenbedingung (11.1) und zerlegen $A = (A_B|A_N)$ sowie $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B|\mathbf{x}_N)^T$. Wir wissen, dass $A_N = A_B X$, wobei X die Einträge der Simplextabelle sind. Aus

$$A_B \mathbf{x}_B + A_N \mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

folgt

$$\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} + A_B^{-1} A_N(-\mathbf{x}_N) = \underbrace{A_B^{-1}\mathbf{b}}_{\alpha_i} + \underbrace{X(-\mathbf{x}_N)}_{\text{Rest von (11.6)}} .$$

■

Sei jetzt für $i = p$ die Variable $x_p^{(0)}$ nicht ganz, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Falls mehrere $x_i^{(0)}$ nicht ganz sind, wähle man einen dieser Indizes. Welches der beste ist, ist im allgemeinen nicht zu beantworten.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir

$$[a] = \mathrm{INT}(a), \quad \{a\} = a - [a],$$

wobei $\mathrm{INT}(a)$ der größte ganzzahlige Bestandteil von a ist. Es gilt $\{a\} \in [0, 1)$. Insbesondere gilt $\left\{x_p^{(0)}\right\} > 0$. Da für das Optimum die Komponenten mit den Indizes $m+1, \ldots, n$ verschwinden und wegen (11.6) folgt damit

$$\alpha_p = x_p^{(0)} = \underbrace{\left[x_p^{(0)}\right]}_{\geq 0} + \underbrace{\left\{x_p^{(0)}\right\}}_{>0} > 0.$$

Satz 11.6 *Die Bedingung*

$$s_1 = -\{\alpha_p\} - \{\alpha_{p,m+1}\}(-x_{m+1}) - \ldots - \{\alpha_{p,n}\}(-x_n), \quad s_1 \geq 0 \tag{11.7}$$

stellt eine Schnittbedingung gemäß Definition 11.4 dar.

Beweis: Die Bedingungen von Definition 11.4 müssen geprüft werden. Wir fügen die Bedingung (11.7) zum System der Nebenbedingungen (11.1), (11.2) hinzu und setzen $\mathbf{x}^{(0)}$ ein. Aus (11.6) und wegen $x_{m+1}^{(0)} = \ldots = x_n^{(0)} = 0$ folgt

$$s_1 = -\alpha_p < 0,$$

also ist $\mathbf{x}^{(0)}$ nicht zulässig.

Nun ist zu zeigen, dass mit (11.7) kein bezüglich (11.1) – (11.3) zulässiger Punkt weggeschnitten wird. Sei $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ ein Punkt, der (11.1) – (11.3) erfüllt. Dann folgt aus (11.7)

$$s_1 = -\underbrace{(\alpha_p - [\alpha_p])}_{\in[0,1)} - \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{(\alpha_{p,j} - [\alpha_{p,j}])}_{\in(0,1)} \underbrace{(-\tilde{x}_j)}_{\leq 0} .$$

Damit ist $s_1 > -1$. Andererseits gilt

$$s_1 = \underbrace{[\alpha_p] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{p,j}]\,(-\tilde{x}_j)}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{-\alpha_p - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{p,j}\,(-\tilde{x}_j)}_{(11.6)=-\tilde{x}_p\in\mathbb{Z}}.$$

Damit ist $s_1 \in \mathbb{Z}$. Da $s_1 > -1$ folgt $s_1 \geq 0$. ■

Man hat mit der Schnittbedingung (11.7) das Optimum bezüglich der Nebenbedingungen (11.1), (11.2) abgeschnitten, ohne dabei auch ganzzahlige Lösungen wegzuschneiden. Folgendes lineare Programm ist jetzt zu lösen:

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min\,! \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{p,j}\}\,(-x_j) + s_1 &= -\{\alpha_p\} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ s_1 &\geq 0. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Zur Lösung von (11.8) berechnet man zuerst die optimale Lösung des linearen Programms ohne Ganzzahligkeitsbedingung mit Hilfe der dualen Simplexmethode. Hat man diese, und ist sie nicht ganzzahlig, betrachtet man im nächsten Schritt die duale Simplextabelle mit

$$x_i = \alpha_i, \quad i = 1,\ldots,m, \quad s_1 = -\alpha_p \tag{11.9}$$

(beachte: in der Simplextabelle des dualen Problems steht $x_i = \mathbf{b}_i\mathbf{b} = \alpha_i$). Der Vektor (11.9) ist eine dual zulässige Lösung, das heisst, die Nebenbedingungen des dualen Problems sind erfüllt. *Übungsaufgabe* Eventuell ist die Einführung weiterer Schnittbedingungen nötig. Das oben beschriebene Vorgehen wird im nächsten Beispiel demonstriert.

Beispiel 11.7 Wir betrachten das lineare Programm

$$\begin{aligned} z = -x_1 - 2x_2 &\to \min\,! \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \\ \mathbf{x} &\quad \text{ganz.} \end{aligned}$$

Die optimale duale Simplextabelle lautet

			3	4
i	c_i	Lösung	0	0
1	-1	5/3	1/3	-1/3
2	-2	$\boxed{20/3}$	1/3	2/3
5	0	7/3	-1/3	1/3
		-15	-1	-1

Die Lösung ist optimal, aber nicht ganzzahlig. Heuristisch wählt man $\{\alpha_p\}$ möglichst groß, hier zum Beispiel $\{20/3\} = 2/3$. Es besteht allerdings die Gefahr, dass man an der falschen Stelle abschneidet. Nun verwendet man, dass die Tabelle der dualen Simplexmethode eine Optimaltabelle der primalen Aufgabe ist, Bemerkung 10.6.

Damit kann man Lemma 11.5 für die Formulierung der Schnittbedingung nutzen, da die benötigten Koeffizienten $\alpha_{p,j}$ gerade im Nichtbasisteil der ausgewählten Zeile stehen:

$$s_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-x_3) - \frac{2}{3}(-x_4) \geq 0.$$

Führt man die Variable s_1 als $m+1$–ste Eckvariable in die duale Simplextabelle ein, dann hat man die neue Matrix der Basisvektoren

$$\tilde{A}_B = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \dots & \mathbf{a}_m & \mathbf{0} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{A}_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \\ \mathbf{e}_{m+1} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{e}_{m+1}$ der $m+1$–ste Einheitsvektor ist. Somit erhält man in der Spalte Lösung für s_1 : $\mathbf{e}_{m+1}\mathbf{b} = -\alpha_p = -2/3$. In den Nichteckspalten der Zeile von s_1 erhält man die Zahlen $-\{\alpha_{p,j}\}$, siehe (11.8). Man hat die neue duale Simplextabelle

			3	4
i	c_i	Lösung	0	0
1	-1	5/3	1/3	-1/3
2	-2	20/3	1/3	2/3
5	0	7/3	-1/3	1/3
s_1	0	-2/3	-1/3	$\boxed{-2/3}$
		-15	-1	-1

Die Hauptzeile ist die Zeile von s_1. Aus

$$\theta = \min_{j \in \{3,4\}} \left\{ \frac{-1}{-1/3}, \frac{-1}{-2/3} \right\} = \frac{3}{2}$$

folgt, dass $k = 4$ die Hauptspalte ist. Der Simplexschritt führt zu folgender Tabelle

			3	s_1
i	c_i	Lösung	0	0
1	-1	2	-1/2	-1/2
2	-2	6	0	1
5	0	2	-1/2	1/2
4	0	1	1/2	-3/2
		-14	-1/2	-3/2

Damit hat man die Optimallösung des ganzzahligen linearen Programms gefunden.

In der Praxis sind im allgemeinen mehr Schnittbedingungen nötig. Die Endlichkeit des Verfahrens ist nicht gesichert. □