Kapitel 9

Dualitätssätze der linearen Optimierung

Sei

$$
\begin{array}{rcl}
z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \rightarrow & \min ! \\
A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\
\mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}
\end{array}
\tag{9.1}
$$

mit $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ein lineares Programm.

Definition 9.1 Duales lineares Programm. Das lineare Programm

$$
\begin{array}{rcl}
\tilde{z} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} & \rightarrow & \max ! \\
A^T\mathbf{y} & \leq & \mathbf{c}
\end{array}
\tag{9.2}
$$

mit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ wird das zu (9.1) duale lineare Programm genannt. Man nennt (9.1) primal. □

Die Ziele dieses Abschnitts bestehen darin, die Existenz zulässiger Lösungen des dualen linearen Programms, die Relationen der zulässigen Lösungen des primalen und dualen linearen Programms, die Relationen zwischen den Optimallösungen und die Verbesserung der numerischen Verfahren zu untersuchen. Ein duales Analogon zur Simplexmethode soll entwickelt werden.

Satz 9.2 *Ist* $\mathbf{x}$ *eine zulässige Lösung von (9.1) und ist* $\mathbf{y}$ *eine zulässige Lösung von (9.2), dann gilt* $z(\mathbf{x}) \geq \tilde{z}(\mathbf{y})$.

Beweis: Es gelten $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ und $\mathbf{c}^T \geq \mathbf{y}^T A$. Damit folgt

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \geq \mathbf{y}^T A\mathbf{x} = \mathbf{y}^T\mathbf{b} = \tilde{z}(\mathbf{y}).$$

■

Man nennt diesen Satz auch schwachen Dualitätssatz.

Folgerung 9.3 *Sind* $\mathbf{x}_0$ *eine zulässige Lösung von (9.1) und* $\mathbf{y}_0$ *eine zulässige Lösung von (9.2) und gilt* $z(\mathbf{x}_0) = \tilde{z}(\mathbf{y}_0)$, *dann ist* $\mathbf{x}_0$ *eine Optimallösung von (9.1) und* $\mathbf{y}_0$ *ist eine Optimallösung von (9.2).*

Satz 9.4 ***Starker Dualitätssatz.*** *Das primale Problem (9.1) besitzt genau dann eine endliche Optimallösung, wenn das duale Problem (9.2) eine endliche Optimallösung besitzt. In diesem Fall gilt* $z_{\min} = \tilde{z}_{\max}$.

Beweis: 1.) Es existiere ein endliches Minimum des primalen Problems (9.1) und dieses Minimum werde von $\mathbf{x}_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0, \ldots, 0\right)^T$ angenommen. Dann sind erklärt:

- Die zugehörigen Basisvektoren seien $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$.
- Mit $X = (x_{ij})_{i=1,\ldots,m, j=1,\ldots,n}$ werden die Darstellungskoeffizienten für alle Spalten von A bezüglich dieser Basisvektoren bezeichnet.
- $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^T$ sei der Vektor, der durch $z_j = \sum_{i=1}^m c_i x_{ij}$, $j = 1, \ldots, n$, erzeugt wird.
- $A_0 = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$,
- $\mathbf{c}_0 = (c_1, \ldots, c_m)^T$.

Wegen des Optimalitätskriteriums der Simplexmethode gilt für $\mathbf{x}_0$

$$\mathbf{z} \le \mathbf{c} \quad (z_k - c_k \le 0,\ k = 1, \ldots, n). \tag{9.3}$$

Aus der Nebenbedingung und der Definition der Darstellungskoeffizienten folgt

$$A_0 \mathbf{x}_0 = \mathbf{b}, \quad A_0 X = A.$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbf{x}_0 = A_0^{-1} \mathbf{b}, \quad X = A_0^{-1} A. \tag{9.4}$$

Weiter erhalten wir aus der Definition von $\mathbf{z}$

$$\mathbf{c}_0^T X = \mathbf{z}^T \le \mathbf{c}^T. \tag{9.5}$$

Jetzt setzen wir $\mathbf{y}_0 = A_0^{-T} \mathbf{c}_0$ und zeigen, dass $\mathbf{y}_0$ eine Optimallösung des dualen Problems (9.2) ist. Die Zulässigkeit von $\mathbf{y}_0$ folgt aus (9.4) und (9.5)

$$\mathbf{y}_0^T A = \mathbf{c}_0^T A_0^{-1} A = \mathbf{c}_0^T X \le \mathbf{c}^T.$$

Die Lösung $\mathbf{y}_0$ ist optimal wegen

$$\tilde{z}(\mathbf{y}_0) = \mathbf{b}^T \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_0^T \mathbf{b} = \mathbf{c}_0^T A_0^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{c}_0^T \mathbf{x}_0 = z(\mathbf{x}_0),$$

wobei (9.4) verwendet wurde. Damit liefert $\mathbf{y}_0$ einen Zielfunktionswert, der mit dem von $\mathbf{x}_0$ übereinstimmt. Da $\mathbf{x}_0$ Optimum des primalen Problems ist, ist $\mathbf{y}_0$ wegen Folgerung 9.3 Optimum des dualen Problems. Insbesondere gilt $z_{\min} = \tilde{z}_{\max}$.

2) Das Ziel besteht darin, diesen Teil des Beweises auf den ersten Teil zurückzuführen, indem gezeigt wird, dass das duale Problem des dualen Problems (9.2) gerade das primale Problem (9.1) ist. Dazu wird das duale Problem so umgeformt, dass es die Gestalt eines primalen Problems annimmt. Bildet man dann aus dieser Form das duale Problem, erhält man die Behauptung.

Es existiere ein endliches Maximum $\tilde{z}_{\max}$ des dualen Problems (9.2). Wir setzen für einen beliebigen Vektor $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, der die Nebenbedingungen von (9.2) erfüllt, $\mathbf{y} = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \ge \mathbf{0}$. Aus den Nebenbedingungen von (9.2) erhält man

$$A^T (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2) + \mathbf{y}_3 = \mathbf{c} \quad \in \mathbb{R}^n,$$

mit den Schlupfvariablenvektor $\mathbf{y}_3 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y}_3 \ge \mathbf{0}$. Daraus bilden wir folgendes zu (9.2) äquivalentes Problem, wobei das Vorzeichen der Zielfunktion geändert wird

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T(\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_1) &\to \min\ ! \\ -A^T \mathbf{y}_1 + A^T \mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_3 &= -\mathbf{c} \\ \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3 &\ge \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Setzt man

$$
\begin{aligned}
\mathbf{w} &= \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \mathbf{y}_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m+n}, \ \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -\mathbf{b} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{0}_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2m+n}, \\
\mathcal{A} &= \left(-A^T, A^T, -I_n\right) \in \mathbb{R}^{n\times(2m+n)},
\end{aligned}
$$

so kann man dieses System in der Form

$$
\begin{aligned}
\mathbf{d}^T\mathbf{w} &\to \min \ ! \\
\mathcal{A}\mathbf{w} &= -\mathbf{c} \\
\mathbf{w} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}
\tag{9.6}
$$

schreiben.

Einerseits ist dieses Problem zum dualen Problem (9.2) äquivalent. Damit besitzt die Zielfunktion von (9.6) nach Voraussetzung ein endliches Optimum $z_{\min}^{(\mathbf{w})}$, für welches gilt $z_{\min}^{(\mathbf{w})} = \tilde{z}_{\max}$.

Andererseits besitzt das Problem (9.6) die gleiche Gestalt wie das primale Problem (9.1). Die duale Aufgabe zu (9.6) hat nun folgende Gestalt: Gesucht ist $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ mit

$$
-\mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \max \ !, \quad \mathcal{A}^T\mathbf{x} \leq \mathbf{d},
$$

das heißt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min \ ! \\
-A\mathbf{x} &\leq -\mathbf{b} \\
A\mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\
-\mathbf{x} &\leq \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Aus den ersten beiden Nebenbedingungen folgt $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Damit ist gezeigt, dass (9.1) das duale Problem zu (9.2) ist. Aus dem ersten Teil des Beweises wissen wir, dass die duale Aufgabe zu (9.6) ein endliches Maximum besitzt und das dieses Maximum mit $z_{\min}^{(\mathbf{w})} = \tilde{z}_{\max}$ übereinstimmt. ■

Jetzt wird der Fall betrachtet, dass die Zielfunktion der primalen Aufgabe nach unten nicht beschränkt ist.

Satz 9.5 *Ist die Zielfunktion $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ der primalen Aufgabe (9.1) auf der Menge der zulässigen Lösungen nach unten unbeschränkt, dann besitzt die zugehörige duale Aufgabe (9.2) keine zulässige Lösung. Analog gilt, dass im Falle dass die Zielfunktion der dualen Aufgabe auf der Menge der zulässigen Lösungen nicht nach oben beschränkt ist, die primale Aufgabe keine zulässige Lösung besitzt.*

Beweis: Indirekter Beweis. Sei die Zielfunktion des primalen Problems nicht nach unten beschränkt und sei $\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung des dualen Problems, das heißt es gilt $A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}^T$. Aus Satz 9.2 folgt dann aber $z(\mathbf{x}) \geq \tilde{z}(\mathbf{y})$ für alle zulässigen Lösungen $\mathbf{x}$ des primalen Problems und die Zielfunktion wäre nach unten beschränkt.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten Aussage und daraus, dass das primale Problem (9.1) das duale Problem des dualen Problems (9.2) ist. ■

Folgerung 9.6 *Eine zulässige Lösung $\mathbf{x}_0$ des primalen Problems (9.1) ist genau dann optimal, wenn eine zulässige Lösung $\mathbf{y}_0$ des dualen Problems (9.2) existiert, mit $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}_0$. Eine analoge Aussage gilt, wenn man vom dualen Problem ausgeht.*

Satz 9.7 Komplementaritätssatz. *Es sei* $\mathbf{x}_0 = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0, \ldots, 0)^T$ *eine zulässige Basislösung des primalen Problems (9.1). Dann ist* $\mathbf{x}_0$ *genau dann optimal, wenn es eine zulässige Lösung* $\mathbf{y}$ *des dualen Problems (9.2) mit folgenden Eigenschaften gibt:*

1) für alle Indizes $i \in \{1, \ldots, m\}$ *mit* $x_i^{(0)} > 0$ *gilt* $\mathbf{a}_i^T \mathbf{y} = c_i$,

2) für alle Indizes $j \in \{1, \ldots, n\}$ *mit* $\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} < c_j$ *gilt* $x_j^{(0)} = 0$.

Beweis: i) Sei $\mathbf{x}_0$ optimal. Nach Folgerung 9.6 gibt es dann ein $\mathbf{y}_0$ mit $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}^T\mathbf{y}_0$. Einsetzen von $A\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ ergibt

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = \underbrace{\mathbf{x}_0^T A^T \mathbf{y}_0}_{\in\mathbb{R}} = \mathbf{y}_0^T A \mathbf{x}_0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\mathbf{c}^T - \mathbf{y}_0^T A\right)\mathbf{x}_0 = 0.$$

Komponentenweise lautet diese Gleichung

$$\sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \mathbf{y}_0^T \mathbf{a}_j\right) x_j^{(0)} = 0.$$

Da $\mathbf{y}_0$ eine zulässige Lösung des dualen Problems ist und $\mathbf{x}^{(0)}$ eine zulässige Lösung des primalen Problems, sind alle Faktoren nichtnegativ. Damit die Summe Null wird, müssen alle Summanden verschwinden und wenigstens jeweils einer der Faktoren Null sein. Ist $x_j^{(0)} > 0$, muss $\mathbf{a}_j^T\mathbf{y}_0 = c_j$ sein. Ist $\mathbf{a}_j^T\mathbf{y} < c_j$, so muss $x_j^{(0)} = 0$ sein. Die Optimallösung $\mathbf{y}_0$ des dualen Problems erfüllt also die Bedingungen 1) und 2).

ii) Es gibt einen Vektor $\mathbf{y}$ der die Bedingungen 1) und 2) erfüllt. Wir nehmen an, $\mathbf{x}_0$ sei nicht optimal. Dann gilt $\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 > \mathbf{b}^T\mathbf{y}$. Analog zum ersten Teil erhält man

$$\sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \mathbf{y}^T \mathbf{a}_j\right) x_j^{(0)} > 0.$$

Aus den Bedinungen 1), 2) folgt jedoch, dass die Summe verschwindet. Damit ist die Annahme falsch und $\mathbf{x}_0$ ist optimal. ■

Bemerkung 9.8 Mit Hilfe der Dualität ist die Möglichkeit der Bestimmung von Schranken für eine zulässige (optimale) Lösung gegeben. Es gilt

$$z(\mathbf{x}) \geq z(\mathbf{x}_0) = \tilde{z}(\mathbf{y}_0) \geq \tilde{z}(\mathbf{y}),$$

wobei $\mathbf{x}$ eine zulässige Lösung des primalen Problems (9.1), $\mathbf{x}_0$ eine Optimallösung von (9.1), $\mathbf{y}$ eine zulässige Lösung des dualen Problems (9.2) und $\mathbf{y}_0$ eine Optimallösung des dualen Problems ist. □

Ein Spezialfall des dualen linearen Programms ist das symmetrische duale lineare Programm. Gegeben sei das lineare Programm

$$\begin{array}{rcl} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \rightarrow & \min\ ! \\ A\mathbf{x} & \geq & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{9.7}$$

Aus (9.7) wird ein lineares Programm

$$\begin{array}{rcl} \tilde{z} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} & \rightarrow & \max\ ! \\ A^T\mathbf{y} & \leq & \mathbf{c} \\ \mathbf{y} & \geq & \mathbf{0}. \end{array} \tag{9.8}$$

konstruiert.

Satz 9.9 *Die linearen Programm (9.7) und (9.8) sind duale lineare Programme im Sinne von Definition 9.1.*

Beweis: Aus (9.7) konstruieren wir das lineare Programm in Normalform

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \to \min\ !, \quad A\mathbf{x} - \mathbf{v} = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}, \mathbf{v} \geq \mathbf{0}.$$

Aus Definition 9.1 ergibt sich das folgende duale lineare Programm

$$\tilde{z} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} \to \max\ !, \quad A^T\mathbf{y} \leq \mathbf{c}, \quad -I_m\mathbf{y} \leq \mathbf{0}.$$

Die letzte Bedingung ist äquivalent zu $\mathbf{y} \geq \mathbf{0}$. ■

Man hat nun eine Nichtnegativitätsbedingung an die zulässigen Lösungen des dualen Programms (9.8).

Satz 9.10 Komplementaritätssatz. *Sind* $\mathbf{x}_0$ *eine zulässige Lösung von (9.7) und* $\mathbf{y}_0$ *eine zulässige Lösung von (9.8), so sind sie genau dann optimal, wenn die folgenden Relationen erfüllt sind:*

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_0^T\left(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\right) &= 0, & (9.9)\\ \left(\mathbf{y}_0^T A - \mathbf{c}^T\right)\mathbf{x}_0 &= 0. & (9.10)\end{aligned}$$

Beweis: 1) Seien $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ optimal. Dann folgt aus der Nebenbedingung von (9.8), aus der Nichtnegativität von $\mathbf{x}_0$ und aus Folgerung 9.6

$$\mathbf{y}_0^T\left(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\right) = \mathbf{y}_0^T A\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0^T\mathbf{b} \leq \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 - \mathbf{y}_0^T\mathbf{b} = 0.$$

Andererseits gilt mit $\mathbf{y}_0 \geq \mathbf{0}$ und der Nebenbedingung von (9.7)

$$\mathbf{y}_0^T\left(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}\right) \geq 0.$$

Aus beiden Ungleichungen zusammen folgt (9.9). Die Beziehung (9.10) beweist man analog.

2) Gelten jetzt (9.9) und (9.10). Daraus folgt

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0^T A\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0^T\mathbf{b}.$$

Nach Folgerung 9.6 sind $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}_0$ optimal. ■

Beispiel für Anwendungen des Dualitätsprinzips werden in den Übungsaufgaben behandelt.