Kapitel 7

Zur Ausartung

Nach Definition 3.4 liegt Ausartung dann vor, wenn mindestens eine der Variablen $x_i, i = 1 \ldots, m$, einer zulässigen Basislösung verschwindet. Das dahinterliegende Problem ist, dass die Zuordnung Ecke – zulässige Basislösung nicht eindeutig ist. Eine Ecke des Polyeders kann Basislösung zu verschiedenen Basen sein. Das kann aber nur bei ausgearteten Basislösungen auftreten.

Beispiel 7.1 Betrachte das lineare Programm mit

$$z = x_1 + x_2 - x_3 \to \min\ !, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Extremalpunkt ist $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T$. Zulässige Basen sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Grund für die Nichteindeutigkeit der Basis besteht darin, dass es zu viele Nebenbedingungen gibt, die den Extremalpunkt bestimmen. In diesem Beispiel ist er durch die beiden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gleichermaßen gegeben. Das haben wir bereits in den Beispielen 3.5 (2. Teil) und 5.4 gesehen. □

In der Praxis stellt sich heraus, dass die meisten zu lösenden linearen Programme ausgeartet sind.

In der Simplexmethode ist es möglich, dass im Falle der Ausartung der zulässigen Basislösung nur ein Basiswechsel stattfindet, siehe Beispiel 5.4. Das kann zu einem unendlichen Zyklus werden, einem sogenannten Basiszyklus. Es ist jedoch möglich, Ausartung prinzipiell auszuschließen, beispielsweise mit der Methode der ε–Störung, beziehungsweise einen Basiszyklus zu umgehen, mit der lexikographischen Simplexmethode.

7.1 Die Methode der ε–Störung

Wir betrachten das lineare Programm

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}. \tag{7.1}$$

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ eine zulässige Basislösung mit den Basisvektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{a}_1 x_{1j} + \ldots + \mathbf{a}_m x_{mj} &= \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben und sei $A_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ die Matrix der Basisvektoren. Dann betrachtet man anstelle (7.1) ein lineares Programm mit gestörten Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\to \min\ ! \\ A_B\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j (7.2) &= \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$A_B\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon^j \mathbf{a}_j = \mathbf{a}_1 \left(x_1 + \sum_{j=1}^{n} x_{1j}\varepsilon^j \right) + \ldots + \mathbf{a}_m \left(x_m + \sum_{j=1}^{n} x_{mj}\varepsilon^j \right) = \mathbf{b}.$$

Mit den Nebenbedingungen (7.3) hat man für hinreichend kleines ε die zulässige Basislösung

$$x_i^{(\varepsilon)} := x_i + \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\varepsilon^j = x_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}\varepsilon^j,$$

da für $i = 1, \ldots, m$, gilt $x_{ij} = \delta_{ij}$. Die Eigenschaft der Basislösung folgt daraus, dass die Basis nicht geändert wurde und die Nebenbedingung in (7.3) erfüllt ist. Die Zulässigkeit folgt für hinreichend kleines ε aus $\varepsilon^i > 0$ und $\varepsilon^i \gg \varepsilon^j$ für $i < j$. Wegen $x_i > 0$ und

$$\varepsilon^i > \left| \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}\varepsilon^j \right| \quad \Longrightarrow \quad x_i^{(\varepsilon)} \ge 0.$$

Der zugehörige Zielfunktionswert ist

$$\begin{aligned} z_0^{(\varepsilon)} &= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\varepsilon^j \right) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} c_i x_{ij} \right) \varepsilon^j \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \sum_{j=1}^{n} z_j \varepsilon^j. \end{aligned}$$

Im Bild 7.1 wird die Störung der Nebenbedingungen graphisch veranschaulicht. Im dicken Punkt schneiden sich drei Geraden. Das führt dazu, dass die Zuordnung Ecke – Basislösung nicht eindeutig ist. Man hat Ausartung. Durch die Störung der Nebenbedingungen (durchgezogene Geraden) erreicht man, dass es nur noch Schnittpunkte mit genau zwei Geraden gibt.

Bemerkung 7.2 *Berechnung von θ.* In der Simplexmethode benötigt man die Größe θ, siehe (4.8). Sei $z_k - c_k > 0$. Dann berechnet sich θ in der Methode der ε–Störung durch

$$\theta = \min_{i=1,\ldots,m; x_{ik}>0} \frac{x_i^{(\varepsilon)}}{x_{ik}} = \min_{i=1,\ldots,m; x_{ik}>0} \frac{x_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}\varepsilon^j}{x_{ik}}. \tag{7.4}$$

□

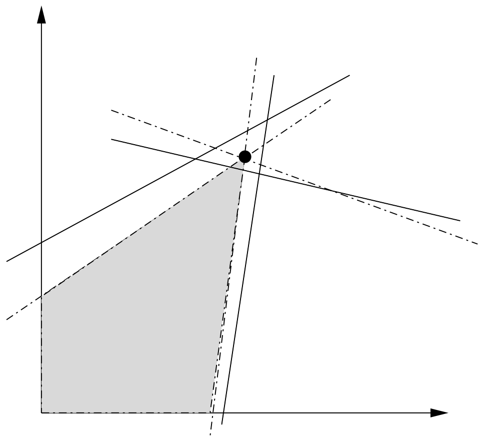

Abbildung 7.1: Veranschaulichung der Störung der Nebenbedingungen.

Satz 7.3 *Sei* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ *eine zulässige Basislösung der Originalaufgabe (7.1). Falls*

$$\theta = \min_{i=1,\ldots,m; x_{ik}>0} \frac{x_i}{x_{ik}} = 0$$

gilt (Ausartung), dann gibt es ein $\bar{\varepsilon} > 0$ *dergestalt, dass*

$$\theta = \min_{i=1,\ldots,m; x_{ik}>0} \frac{x_i^{(\varepsilon)}}{x_{ik}} = \frac{x_l^{(\varepsilon)}}{x_{lk}} > 0 \quad \forall\, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}) \tag{7.5}$$

und der Index l ist im gestörten Problem (7.3) eindeutig bestimmt.

Beweis: Aus den Vorbetrachtungen folgt $x_i^{(\varepsilon)} > 0$ und damit $\theta > 0$ in (7.5) für $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$.

Die Eindeutigkeit von l wird indirekt bewiesen. Sei l also nicht eindeutig bestimmt, das heißt es gibt zwei Indizes $l_1 \neq l_2$ mit

$$\frac{x_{l_1} + \varepsilon^{l_1} + \sum_{j=m+1}^{n} x_{l_1 j}\varepsilon^j}{x_{l_1 k}} = \frac{x_{l_2} + \varepsilon^{l_2} + \sum_{j=m+1}^{n} x_{l_2 j}\varepsilon^j}{x_{l_2 k}}$$

für alle $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$. Die beiden Terme sind Polynome in ε. Diese sind genau dann gleich für alle $\varepsilon \in (0, \tilde{\varepsilon})$, wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen. Insbesondere müssen die Koeffizienten vor den Termen mit Potenz l_1 und l_2 gleich sein. Ist $l_1 \neq l_2$, so ist für den linken Term der Koeffizient vor ε^{l_1} ungleich Null und für den rechten Term gleich Null. Für den Koeffizienten vor ε^{l_2} gilt sinngemäß das gleiche. Diese Koeffizienten können nur dann gleich sein, wenn $l_1 = l_2$, im Widerspruch zur Annahme. ■

Prinzipiell kann diese Manipulation in jedem Simplexschritt durchgeführt werden und man kann damit sichern, dass l stets eindeutig bestimmt ist. Diese Vorgehensweise ist für jeden Eckpunkt des zulässigen Bereichs ausgeführt zu denken. Da die Anzahl der Eckpunkte endlich ist, erhält man folgenden Satz.

Satz 7.4 *Zu jedem linearen Optimierungsproblem existiert bei geeigneter Wahl von* $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$ *ein gestörtes lineares Optimierungsproblem, so dass dieses keine ausgeartete zulässige Basislösung besitzt. Für* $\varepsilon \to 0$ *konvergiert das Optimum des gestörten Problems (7.3) zum Optimum des Originalproblems (7.1).*

Bemerkung 7.5 *Praktische Umsetzung der Methode der* ε*–Störung.* Trotz dieser schönen Theorie macht man das alles bei praktischen Problemen nicht. Für diese wird vorgeschlagen: Falls in einer zulässigen Basislösung wenigstens ein Wert $x_i = 0$ bestimmt wurde, so kann $\theta = 0$ sein. Wähle dann

$$l = \min_{x_{ik}>0} \{i \ : \ x_i = 0\},$$

wobei i über alle Basisvariablen läuft und k der Index der festgelegten Hauptspalte ist, und transformiere mit diesem Index l. Theoretisch besteht die Gefahr eines Zyklus, in der Praxis ist das aber eher unwahrscheinlich. □

7.2 Die lexikographische Simplexmethode

Bei der lexikographischen Simplexmethode erfolgt die Auswahl der zu tauschenden Basisvektoren so, dass keine Wiederholungen auftreten können. Mit dieser Vorgehensweise wird nicht die Ausartung behoben, sondern es wird verhindert, dass Basiszyklen auftreten.

Definition 7.6 ***Lexikopositiver Vektor.*** *Ein Vektor* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *heißt lexikopositiv, falls* $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_m)^T$ *mit* $i \geq 1$ *und* $x_i > 0$. *Das heißt, die erste von Null verschwindende Komponente ist positiv. Die Schreibweise ist*

$$\mathbf{x} >_l \mathbf{0}.$$

Sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. *Dann ist* $\mathbf{y} >_l \mathbf{x}$ *genau dann, wenn* $\mathbf{y} - \mathbf{x} >_l \mathbf{0}$.

Wir betrachten das lineare Programm (7.1) mit $\operatorname{rg}(A) = m$. Sei

$$\mathbf{x}_B = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$$

eine zulässige Basislösung. Die zugehörige Matrix der Basisvektoren sei $A_B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und die der Nichtbasisvektoren A_N. Dann sind die Zeilen der Matrix

$$(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A}) := A_B^{-1}(\mathbf{b}, A) = A_B^{-1}\,(\mathbf{b}, A_B, A_N) \in \mathbb{R}^{m\times(n+1)}$$

lexikopositiv, da

$$A_B^{-1}(\mathbf{b}, A) = (\mathbf{x}_B, I_m, \bar{\mathbf{a}}_{m+1}, \ldots, \bar{\mathbf{a}}_n)\,,$$

$\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$ und I_m die Einheitsmatrix des $\mathbb{R}^{m\times m}$ ist. Falls die Basisvariablen nicht die ersten m Variablen sind, dann ordnet man sie nach vorn.

Anstelle von (4.8) wird bei der lexikographischen Simplexmethode der Index l durch

$$\theta = \min_{>_l; i=1,\ldots,m, x_{ik}>0} \frac{\mathbf{e}_i^T(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A})}{x_{ik}} =: \frac{\mathbf{e}_l^T(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A})}{x_{lk}}$$

bestimmt, wobei $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$ der Einheitsvektor ist, der in der i–ten Komponente eine Eins hat. Das heißt, das Minimum wird bezüglich der lexikographischen Ordnung genommen. Das obige Symbol bedeutet, dass man sich wie üblich alle Einträge mit $x_{ik} > 0$ ansieht, die zugehörigen Vektoren $e_i^T(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A})$ bildet, durch x_{ik} dividiert und von den so erhaltenen Vektoren den lexikographisch kleinsten nimmt, um l zu bestimmen. Es gilt, siehe beispielsweise [JS04]:

- Falls l in der allgemeinen Simplexmethode (4.8) eindeutig bestimmt ist, erhält man bei der lexikographischen Simplexmethode den gleichen Index.
- Die lexikographische Simplexmethode definiert einen eindeutigen Index l. Man kann zeigen, dass eine Nichteindeutigkeit im Widerspruch zu $rg(A) = m$ steht.
- Das Ergebnis eines lexikographischen Simplexschrittes ist wiederum eine lexikopositive Basis.

- Bei der neuen Basislösung ist entweder der Zielfunktionswert kleiner oder die Differenz der Koeffizienten der Zielfunktion der neuen und der alten Basis ist lexikopositiv. Im ersten Fall hat man die Ecke verlassen. Im zweiten Fall kann es bei weiteren lexikographischen Simplexschritten nicht passieren, dass die alte Basis noch einmal verwendet wird. Ein Basiszyklus ist ausgeschlossen.

Bei der lexikographischen Simplexmethode werden also ausgehend von einer lexikopositiven Startlösung weitere lexikopositive Lösungen erzeugt. Dieses Verfahren ist endlich. Es bricht entweder mit einer Lösung des Optimierungsproblems ab, oder es wird gefunden, dass die Zielfunktion nicht nach unten beschränkt ist. Die Anzahl der Schritte kann $n!$ nicht übersteigen. Diese Schranke ist allerdings für größere Werte von n für die Praxis bedeutungslos.