Kapitel 6

Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung

Ein Problem, was man für die Durchführung der Simplexmethode lösen muss, ist die Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung. Wie gut das geht, hängt auch vom konkreten Problem ab.

1. Fall. Liegt

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \right\}$$

vor und gilt $\mathbf{b} \ge \mathbf{0}$. Dann führt man Schlupfvariablen ein und setzt $\mathbf{x} = (0, \ldots, 0, \mathbf{b}^T)^T$.

2. Fall. Liegt das lineare Programm in der Gestalt

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \right\}$$

vor mit $A = (a_{ij}), i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$, $a_{ij} \ge 0$, $b_i \ge 0$ für alle i, j. Dann kann man mit einer sogenannten Engpassmethode zur ersten zulässigen Basislösung gelangen:

1. Ordne die Variablen nach wachsenden Zielfunktionskoeffizienten c_i, Beispiel

$$z = -10x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 5x_5 \quad \to \quad \min\ !$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \ge \mathbf{0}.$$

   Dann ist die Ordnung x_1, x_2, x_5, x_3, x_4.

2. In der festgelegten Reihenfolge werden die Variablen mit dem größtmöglichen Wert genommen, so dass die Nebenbedingungen erfüllt sind. Im Beispiel beginnt man mit $x_1 = 3$
3. Man setzt diesen Wert ein und entfernt die Variable damit aus den Nebenbedingungen. Im Beispiel ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt $x_2 = x_3 = x_7 = 0$, welche Werte man auch gleich einsetzen kann. Damit vereinfacht sich das System der Nebenbedingungen zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{6.1}$$

4. Gehe zu 2.

Im Beispiel betrachtet man als nächstes x_5, da ja bereits $x_2 = 0$ gilt. Der maximale Wert von x_5, so dass (6.1) erfüllt ist, beträgt $x_5 = 1$. Einsetzen ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \tag{6.2}$$

Damit folgt $x_6 = 0$. Da ja auch schon $x_3 = 0$ gilt, wird nun x_4 betrachtet. Der maximale Wert von x_4, so dass (6.2) erfüllt ist, ist $x_4 = 2$. Man erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmt man die letzten beiden Werte und erhält als erste zulässige Basislösung $\mathbf{x} = (3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 2)^T$.

Bemerkung 6.1 Hat man bei der Engpassmethode nicht genügend Variablen, dann führt man künstliche Variablen ein. □

Bemerkung 6.2 *Anderes Ordnungsprinzip der Variablen im Fall, dass die Koeffizienten von unterschiedlicher Größenordnung sind.* Wir betrachten das lineare Programm

$$\begin{aligned} z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 50x_5 \quad &\to \quad \min\ ! \\ \begin{pmatrix} 1 & 10 & 50 & 1 & 0 \\ 2 & 20 & 50 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \quad &\geq \quad \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Nach dem obigen Ordnungsprinzip hat man die Reihenfolge x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 und erhält mit der Engpassmethode die erste zulässige Basislösung *Übungsaufgabe*

$$x_1 = \frac{101}{2},\ x_4 = \frac{99}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = 2485.$$

Man erhält jedoch mit einer anderen Basislösung einen schon viel kleineren Zielfunktionswert

$$x_3 = 2,\ x_5 = 1 \quad \Longrightarrow \quad z = 110.$$

In diesem Fall ist das Ordnungsprinzip

$$\min_{j, c_j \neq 0} \left\{ c_j \min_{i, a_{ij} \neq 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right\}$$

günstiger. Bei diesem Ordnungsprinzip wird auch die Größe der Matrixeinträge beachtet. Im Beispiel kann man x_3 wegen der großen Matrixeinträge nur relativ klein wählen, wenn man die Nebenbedingungen nicht verletzen will. Im Gegensatz dazu kann man x_1 sehr groß wählen ohne die Nebenbedingungen zu verletzen. Der etwas höhere Koeffizient vor x_3 in der Zielfunktion führt wegen des viel kleineren möglichen Wertes dieser Variablen letztlich auf einen kleineren Beitrag als $10x_1$ mit großem x_1. □

3. Fall. Die erste zulässige Basislösung soll jetzt
- ohne spezielle Voraussetzungen und
- mit Hilfe der Simplexmethode

bestimmt werden. Dazu betrachten wir

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \quad \to \quad \min\ ! \tag{6.3}$$

$$A\mathbf{x} \quad = \quad \mathbf{b}, \tag{6.4}$$

$$\mathbf{x} \quad \geq \quad \mathbf{0}. \tag{6.5}$$

und nehmen $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ an. Das kann immer durch Multiplikation der entsprechenden Gleichungen mit einer negativen Zahl erreicht werden. Dem Problem (6.3) – (6.5) wird die Hilfsaufgabe

$$\sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \quad \to \quad \min\ ! \tag{6.6}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} \quad = \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{6.7}$$

$$x_j \quad \geq \quad 0, \quad j = 1, \ldots, m+n \tag{6.8}$$

zugeordnet. Die Variablen $x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}$ heißen künstliche Variablen. Zur Bestimmung der ersten zulässigen Basislösung von (6.3) – (6.5) wird eine Zweiphasenmethode verwendet:

- *1. Phase.* Wähle als erste zulässige Basislösung für (6.6) – (6.8)

$$x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n, \quad x_{n+i} = b_i,\ i = 1, \ldots, m.$$

- *2. Phase.* Löse (6.6) – (6.8) mit der Simplexmethode.

Es stellt sich nun die Frage, ob man auf diesem Wege schließlich eine erste zulässige Basislösung für (6.3) – (6.5) erhält.

Im nächsten Satz wird gezeigt, dass eine Lösung von (6.6) – (6.8) existiert, falls man Ausartung ausschließt.

Lemma 6.3 *Unter der Annahme, dass (6.6) – (6.8) keine ausgearteten Basislösungen besitzt, liefert die Simplexmethode nach endlich vielen Schritten eine optimale Lösung des linearen Programms (6.6) – (6.8).*

Beweis: Da Ausartung per Annahme ausgeschlossen ist, kann kein Basiszyklus auftreten. Somit verringert die Simplexmethode in jedem Schritt den Zielfunktionswert. Es ist dann nur noch die Beschränktheit von unten der Zielfunktion (6.6) über (6.7) bis (6.8) zu zeigen. Das ist offensichtlich, da (6.6) eine Summe nichtnegativer reeller Zahlen ist, die durch Null nach unten beschränkt ist. ■

Nun wird eine Bedingung angegeben, mit welcher man aus dem Optimum des Hilfsproblems (6.6) – (6.8) eine erste zulässige Basislösung von (6.3) – (6.5) erhält.

Satz 6.4 *Sei $\tilde{\mathbf{x}}_0$ eine Optimallösung der künstlichen Aufgabe (6.6) – (6.8) mit dem zugehörigen Zielfunktionswert $\tilde{z}_0$. Gilt $\tilde{z}_0 = 0$, so sind die ersten n Komponenten von $\tilde{\mathbf{x}}_0$ eine zulässige Basislösung der Aufgabe (6.3) – (6.5). Gilt jedoch $\tilde{z}_0 > 0$, so besitzt (6.3) – (6.5) keine zulässige Basislösung.*

Beweis: Aus $\tilde{z}_0 = 0$ folgt $x_{n+i} = 0, i = 1, \dots, m$, das heißt im Optimum verschwinden alle künstlichen Variablen. Also hat $\tilde{\mathbf{x}}_0$ die Gestalt

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m})^T.$$

Da $\tilde{\mathbf{x}}_0$ mit der Simplexmethode konstruiert wurde, folgt dass $\tilde{\mathbf{x}}_0$ eine zulässige Basislösung von (6.3) – (6.5) ist.

Sei nun $\tilde{z}_0 > 0$. Der Beweis wird indirekt geführt, das heißt, wir nehmen an, dass (6.3) – (6.5) die zulässige Basislösung $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$ besitzt. Dann besitzt jedoch (6.6) – (6.8) die zulässige Basislösung $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, 0, \dots, 0)^T$ mit dem zugehörigen Zielfunktionswert (6.6) $\bar{z} = 0$. Das ist im Widerspruch zur Annahme dass $\tilde{z}_0$ der minimale Wert ist. ■

4. Fall. Die M–Methode. Es wird das lineare Programm (6.3) – (6.5) betrachtet und diesem die folgende Hilfsaufgabe zugeordnet

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + M \sum_{i=1}^{m} x_{n+i} \quad \rightarrow \quad \min\ ! \tag{6.9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} \quad = \quad b_i \quad i = 1, \dots, m\ , \tag{6.10}$$

$$\mathbf{x} \quad \geq \quad \mathbf{0}. \tag{6.11}$$

Bei dieser Aufgabe muss der Straffaktor $M > 0$ hinreichend groß gewählt werden, damit im Optimum die Variablen $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ verschwinden. Das Problem besteht darin, dass man im allgemeinen nicht von vornherein festlegen kann, wie groß M zu wählen ist. Möglich sind Aussagen folgender Gestalt:

Satz 6.5 *Es existiert ein $M_0 > 0$, so dass für alle $M > M_0$ aus der Lösbarkeit von (6.3) – (6.5) die Lösbarkeit von (6.9) – (6.11) mit $x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0$ folgt.*

Beweis: Siehe Literatur. ■

Der Vorteil der M–Methode im Vergleich zur Herangehensweise von Fall 3 wird mit folgendem Satz beschrieben.

Satz 6.6 *Falls (6.9) – (6.11) eine Lösung*

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m})^T$$

besitzt, so ist $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ bereits eine Optimallösung von (6.3) – (6.5).

Beweis: Siehe Literatur. ■