Kapitel 5

Die Simplexmethode

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- das untersuchte Problem ist $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\left\{z=\mathbf{c}^T\mathbf{x}\ :\ A\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\ge\mathbf{0}\right\}$,
- die erste zulässige Basislösung sei $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m,0,\ldots,0)^T$, $\mathbf{x}\ge\mathbf{0}$, mit $z_0=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$,
- die Basisvektoren sind $A_B=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$,
- die Nichtbasisvektoren sind $A_N=(\mathbf{a}_{m+1},\ldots,\mathbf{a}_n)$,
- die Darstellung der Nichtbasisvektoren durch die Basis ist

$$\mathbf{a}_j=x_{1j}\mathbf{a}_1+\ldots+x_{mj}\mathbf{a}_m,\quad j=m+1,\ldots,n,$$

- die Hilfsgrößen z_j sind

$$z_j=c_1x_{1j}+c_2x_{2j}+\ldots+c_mx_{mj},\quad j=m+1,\ldots,n.$$

Diese Größen werden in der sogenannten Simplextabelle eingetragen:

			$m+1$	$m+2$	$\ldots$	k	$\ldots$	n
i	c_i	x_i	c_{m+1}	c_{m+2}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_n
1	c_1	x_1	$x_{1,m+1}$	$x_{1,m+2}$	$\ldots$	$x_{1,k}$	$\ldots$	$x_{1,n}$
2	c_2	x_2	$x_{2,m+1}$	$x_{2,m+2}$	$\ldots$	$x_{2,k}$	$\ldots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	c_l	x_l	$x_{l,m+1}$	$x_{l,m+2}$	$\ldots$	$x_{l,k}$	$\ldots$	$x_{l,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_m	x_m	$x_{m,m+1}$	$x_{m,m+2}$	$\ldots$	$x_{m,k}$	$\ldots$	$x_{m,n}$
		z_0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$z_{m+2}-c_{m+2}$	$\ldots$	z_k-c_k	$\ldots$	z_n-c_n
Basisteil				Nichtbasisteil				

Bei der Simplexmethode folgt man jetzt im wesentlichen dem Beweis des Hauptsatzes. Sei $z_k-c_k>0$. Gilt für mehrere Indizes $j\in\{m+1,\ldots,n\}$, dass $z_j-c_j>0$, so nehme man zum Beispiel einen Index, bei dem die Differenz maximal ist

$$z_k-c_k:=\max_{j=m+1,\ldots,n,}z_j-c_j.$$

Dann liegt x_k als Nichtbasisvariable vor, die in die Basis soll. Nun bestimmt man

$$\theta=\min_{i=1,\ldots,m,x_{ik}>0}\frac{x_i}{x_{ik}}=:\frac{x_l}{x_{lk}},$$

das heißt, x_l soll aus der Basis raus.

Definition 5.1 Hauptspalte, Hauptzeile, Hauptelement, Pivotelement. Die Spalte k nennt man Hauptspalte, die Zeile l heißt Hauptzeile und das Element x_{lk} heißt Hauptelement oder Pivotelement.

Die neue Basislösung sei

$$(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{l-1}, \hat{x}_k, \hat{x}_{l+1}, \ldots, \hat{x}_m, 0, \ldots, 0)^T. \tag{5.1}$$

Nun müssen die Elemente der neuen Simplextabelle bestimmt werden:

1. Man benötigt insbesondere eine Darstellung von (5.1). Aus (4.9) erhält man

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m;\ i \neq l; \quad \hat{x}_k = \frac{x_l}{x_{lk}}. \tag{5.2}$$

2. Aus (4.3) folgt für $j = k$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_l &= \frac{1}{x_{lk}} (\mathbf{a}_k - x_{1k}\mathbf{a}_1 - \ldots - x_{l-1,k}\mathbf{a}_{l-1} - x_{l+1,k}\mathbf{a}_{l+1} - \ldots - x_{mk}\mathbf{a}_m) \\ &= -\frac{x_{1k}}{x_{lk}}\mathbf{a}_1 - \ldots - \frac{x_{l-1,k}}{x_{lk}}\mathbf{a}_{l-1} + \frac{\mathbf{a}_k}{x_{lk}} - \frac{x_{l+1,k}}{x_{lk}}\mathbf{a}_{l+1} - \ldots - \frac{x_{mk}}{x_{lk}}\mathbf{a}_m. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Damit haben wir eine Darstellung des neuen Nichtbasisvektors $\mathbf{a}_l$ durch die neue Basis und die neuen Elemente der alten Hauptspalte sind

$$\hat{x}_{kl} = \frac{1}{x_{lk}}, \quad \hat{x}_{il} = -\frac{x_{ik}}{x_{lk}},\ i = 1, \ldots, m,\ i \neq k. \tag{5.4}$$

3. Für den Rest erhält man, beispielhaft an $\mathbf{a}_n$ gezeigt, die folgende Darstellung, wobei man in der ersten Gleichung die alte Basisdarstellung (4.3) nutzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= x_{1n}\mathbf{a}_1 + \ldots + x_{l-1,n}\mathbf{a}_{l-1} + x_{l+1,n}\mathbf{a}_{l+1} + \ldots + x_{mn}\mathbf{a}_n + x_{ln} \underbrace{\mathbf{a}_l}_{(5.3)} \\ &= \left(x_{1n} - \frac{x_{1k}x_{ln}}{x_{lk}} \right) \mathbf{a}_1 + \ldots + \left(x_{l-1,n} - \frac{x_{l-1,k}x_{ln}}{x_{lk}} \right) \mathbf{a}_{l-1} + \frac{x_{ln}}{x_{lk}}\mathbf{a}_k \\ &\quad + \ldots + \left(x_{mn} - \frac{x_{mk}x_{ln}}{x_{lk}} \right) \mathbf{a}_m. \end{aligned}$$

Man erhält also die folgenden Koeffizienten für die neue Basisdarstellung

$$\hat{x}_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, \quad j = m+1, \ldots, n,\ j \neq k, \tag{5.5}$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \underbrace{\frac{x_{lj}}{x_{lk}}}_{\hat{x}_{kj}} x_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m,\ i \neq k,\ j = m+1, \ldots, n,\ j \neq l. \tag{5.6}$$

4. Die Elemente $z_0, z_{m+1} - c_{m+1}, \ldots, z_n - c_n$ transformieren sich ebenfalls nach den obigen Regeln. *Übungsaufgabe*

Damit sind alle Elemente der neuen Simplextabelle berechnet. Zur Berechnung von $\hat{x}_{ij}$ benötigt man die im Rechteck angeordneten Elemente x_{ij}, x_{lj}, x_{lk} und x_{ik} der alten Simplextabelle. Deshalb spricht man auch von der Rechteckregel.

Die Basisform der Simplexmethode ist wie folgt:

1. Normalform des linearen Programms herstellen.
2. Erste zulässige Basislösung angeben.
3. Simplextabelle zu dieser Basislösung erstellen.
4. Existieren Bewertungen $z_j - c_j > 0$? Wenn ja, gehe zu 6.
5. Sind alle Bewertungen $z_j - c_j < 0$?
   - Wenn ja, einzige Optimallösung gefunden, *Simplexmethode beendet.*
   - Wenn nicht, dann gibt es außer negativen Bewertungen $z_j - c_j$ nur noch verschwindende. Das Optimum nicht eindeutig. Man hat ein Optimum gefunden, *beende Simplexmethode.*
6. Wähle die Hauptspalte, also die Spalte, zu der das größte $z_j - c_j > 0$, $j = k$ gehört.
7. Falls $x_{ik} \leq 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, so ist die Zielfunktion nach unten nicht beschränkt, *beende Simplexmethode.*
8. Bestimme θ zur Festlegung der Hauptzeile und des Pivotelements.
9. Basistransformation:
   - 9.1 Ersetze das Pivotelement durch seinen Kehrwert, siehe (5.4).
   - 9.2 Multipliziere die übrigen Elemente der Hauptzeile mit diesem Kehrwert, einschließlich x_l, siehe (5.2) und (5.5).
   - 9.3 Multipliziere die übrigen Elemente der Hauptspalte mit dem negativen Kehrwert, siehe (5.4).
   - 9.4 Vermindere die nicht in einer Hauptreihe stehenden Elemente, einschließlich der übrigen Werte von x_i und der letzten Zeile, um das Produkt der zugehörigen Hauptreihenelemente (Rechteckregel). Dabei nimmt man für das Pivotelement schon den neuen Wert und für die übrigen Elemente die alten Werte, siehe (5.2) und (5.6).
10. Gehe zu 4.

Beispiel 5.2 Wir betrachten das lineare Programm

$$z = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 \quad \rightarrow \quad \min\,!$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Bekannt sei eine erste zulässige Basislösung $x_1 = 350$, $x_4 = 25$, $x_7 = 100$, die den Zielfunktionswert $z = -1075$ besitzt. Die Basisvektoren sind demzufolge

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist nun die Darstellung der Nichtbasisvektoren durch die Basisvektoren. Setze $A_B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_7)$ und $A_N = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6)$. Dann ist die Matrix X der Simplexkoeffizienten gesucht, für die gilt

$$A_N = A_B X \quad \Longrightarrow \quad X = A_B^{-1} A_N.$$

Man erhält hier

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/4 & -1/4 & 1/2 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} z_2 &= c_1x_{12} + c_4x_{42} + c_7x_{72} = (-3)1 + (-1)1 + 0(-2) = -4, \\ z_3 &= -9/2 + 3/4 + 0 = -15/4, \\ z_5 &= -3/2 + 1/4 + 0 = -5/4, \\ z_6 &= 0 - 1/2 + 0 = -1/2 \end{aligned}$$

und somit

$$z_2 - c_2 = -2, \quad z_3 - c_3 = 1/4, \quad z_5 - c_5 = -5/4, \quad z_6 - c_6 = -1/2.$$

Damit erhält man folgende Simplextabelle:

			2	3	5	6
i	c_i	x_i	-2	-4	0	0
1	-3	350	1	3/2	1/2	0
4	-1	25	1	-3/4	-1/4	1/2
7	0	100	-2	$\boxed{5}$	0	-1
		-1075	-2	$\boxed{1/4}$	-5/4	-1/2

Es gibt nur einen Index k mit $z_k - c_k > 0$, nämlich $k = 3$. Damit ist die Hauptspalte bestimmt (Schritt 6). Zur Bestimmung der Hauptzeile (Schritt 8) berechnet man θ:

$$\theta = \min_{x_{i3}>0, i\in\{1,4,7\}} \left(\frac{x_i}{x_{i3}}\right) = \min\left\{\frac{350}{3/2}, \frac{100}{5}\right\} = 20$$

für $i = 7$. Damit ist der Hauptzeilenindex $l = 7$ und das Pivotelement $x_{73} = 5$. Nun führt man die Basistransformation aus (Schritt 9):

			2	7	5	6
i	c_i	x_i	-2	0	0	0
1	-3	320	8/5	-3/10	1/2	3/10
4	-1	40	7/10	3/20	-1/4	7/20
3	-4	20	-2/5	1/5	0	-1/5
		-1080	-19/10	-1/20	-5/4	-9/20

Den neuen Wert für x_1 erhält man beispielsweise aus

$$x_1 = 350 - \frac{3}{2}100\frac{1}{5} = 350 - 30 = 320.$$

Da in der neuen Simplextabelle alle Werte $z_j - c_j < 0$, $j \in \{2, 5, 6, 7\}$, hat man die einzige Optimallösung bestimme: $\mathbf{x} = (320, 0, 20, 40, 0, 0, 0)^T$. □

Bemerkung 5.3 Angenommen, man hat in einer Simplextabelle mehrere $z_j - c_j > 0$. Zu einer dieser Spalten mögen nur Koeffizienten $x_{ij} \le 0$ gehören. Dann ist die Zielfunktion unbeschränkt. □

Beispiel 5.4 *Zur Ausartung.* Wir betrachten das lineare Programm

$$\begin{aligned} z = -x_1 \quad &\rightarrow \quad \min\ ! \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \quad &\ge \quad \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Eine zulässige Basislösung, die gleichzeitig ein Optimum ist, ist $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T$. Wir nehmen als Basisvariablen x_1 und x_2. Da x_2 verschwindet, ist die Basislösung ausgeartet. Man hat

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhält die Simplextabelle

			3	4
i	c_i	x_i	0	0
1	-1	1	-1/3	1/3
2	0	0	4/3	-1/3
		-1	1/3	-1/3

Die Simplexmethode sagt uns an dieser Stelle nicht, dass das Optimum bereits erreicht ist! Gemäß Simplexmethode muss x_3 in die Basis anstelle von x_2 eingeführt werden. Man erhält die Simplextabelle

			2	4
i	c_i	x_i	0	0
1	-1	1	1/4	1/4
3	0	0	3/4	-1/4
		-1	-1/4	-1/4

Damit ist das Optimalitätskriterium der Simplexmethode erfüllt und diese wird beendet. Man hat für das Optimum $\mathbf{x} = (1, 0, 0, 0)^T$ mit diesen beiden Simplextabellen zwei unterschiedliche Basisdarstellungen. Der Zielfunktionswert hat sich im Simplexschritt nicht verändert, es wurde lediglich die Basis gewechselt. □