Kapitel 3

Basislösungen eines linearen Programms in Normalform

Definition 3.1 Lineares Programm in 2. Normalform, einfache Normalform. Gegeben sei das lineare Programm

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \to \min ! \tag{3.1}$$

unter den folgenden Bedingungen

$$\begin{aligned} A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \quad (3.2) \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \quad (3.3) \end{aligned}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dieses Problem wird lineares Programm in (2.) Normalform genannt. □

Bemerkung 3.2 Wenn man die lineare Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n'} a_{i^*j} x_j \leq b_{i^*}$$

gegeben hat, so kann man eine sogenannte Schlupfvariable einführen

$$\sum_{j=1}^{n'} a_{i^*j} x_j + x_{n'+1} = b_{i^*}, \quad x_{n'+1} \geq 0.$$

Mit Hilfe der Schlupfvariablen gelingt es aus dem linearen Programm in 1. Normalform ein lineares Programm in 2. Normalform zu machen. Diese sind äquivalent. Die Kosten der Einführung von Schlupfvariablen bestehen darin, dass man die Dimension des Lösungsvektors erhöht. □

Wir machen jetzt die folgenden Voraussetzungen:

1. $m < n$, das heißt weniger Nebenbedingungen als Unbekannte.
2. $\mathrm{rg}(A) = m$, das heißt, A hat vollen Zeilenrang.
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ sei widerspruchsfrei, das heißt, der zulässige Bereich ist nicht leer.

Definition 3.3 Basislösung. Basislösungen des linearen Programms (3.1) – (3.3) sollen die Lösungsvektoren $\mathbf{x} = (x_{i1}, \ldots, x_{im}, 0, \ldots, 0)^T$ heißen, für die die m Variablen $x_{i1}, \ldots, x_{im}$ eine nicht singuläre Koeffizientenmatrix

$$A_{m,m} = (\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{im})$$

besitzen, wobei $(\mathbf{a}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, die Spaltenvektoren von A bezeichne. □

Die ersten m Variablen einer Basislösung können beliebige reelle Zahlen sein.

Definition 3.4 zulässige Basislösung, ausgeartete (entartete) Basislösung. Gilt für eine Basislösung $\mathbf{x} = (x_{i1}, \ldots, x_{im}, 0, \ldots, 0)^T$, dass $x_{ij} \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$, dann heißt sie zulässig. Verschwindet sie in mindestens einer der Variablen $x_{i1}, \ldots, x_{im}$, so heißt sie ausgeartet oder entartet. □

Die Komponenten einer Basislösung werden Basisvariable genannt, die zugehörigen Spaltenvektoren heißen Basisvektoren. Entsprechend spricht man von Nichtbasisvariablen und Nichtbasisvektoren.

Beispiel 3.5

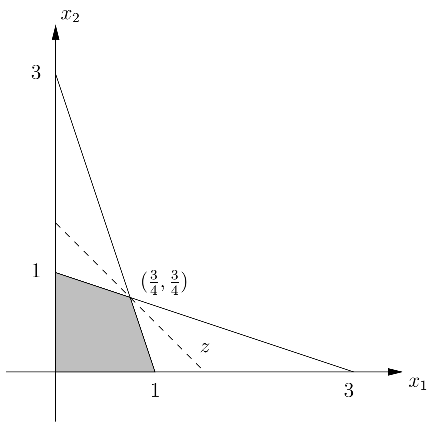
$$\begin{aligned} z = -x_1 - x_2 &\rightarrow \text{min !} \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 3 \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zulässige, nicht ausgeartete Basislösungen sind $(i1 = 3, i2 = 4)$

$$\mathbf{x} = (0, 0, 3, 3)^T, \; A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; z = 0.$$

oder $(i1 = 1, i2 = 2)$

$$\mathbf{x} = (3/4, 3/4, 0, 0)^T, \; A_{2,2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, z = -\frac{3}{2}.$$



Wir führen jetzt die weitere Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}$$

ein. Die Nebenbedingungen des erweiterten linearen Programms haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Dann ist eine ausgeartete zulässige Basislösung des erweiterten linearen Programms $(i1 = 1, i2 = 2, i3 = 5)$

$$(3/4, 3/4, 0, 0, 0)^T, \; A_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; z = -\frac{3}{2}.$$

Im Bild erkennt man, was Ausartung bedeutet. Die Ecke $(3/4, 3/4)$ des zulässigen Bereichs ist bereits durch die ersten beiden Nebenbedingungen bestimmt. Durch die neue Nebenbedingung ist diese Ecke nun wahlweise durch die ersten beiden, durch die erste und die dritte oder die zweite und die dritte Nebenbedingung bestimmt. Die Nebenbedingungen, die diese Ecke des zulässigen Bereichs bestimmen, sind nicht mehr eindeutig. □

Satz 3.6 *Ein Eckpunkt eines zulässigen Bereichs $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \,:\, A\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ liegt genau dann vor, wenn seine Koordinaten eine zulässige Basislösung bilden.*

Beweis: *a) Aus Basislösung folgt Eckpunkt.* Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ eine zulässige Basislösung, das heißt

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b},$$

die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ sind linear unabhängig und die Nichtbasisvariablen x_{m+1}, $\ldots, x_n$ sind gleich Null.

Der Beweis wird indirekt geführt, indem angenommen wird, dass

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

kein Eckpunkt ist. Dann gibt es Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ mit $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, $0 < \lambda < 1$. Da die letzten $n - m$ Komponenten von $\mathbf{x}$ verschwinden, muss das auch für entsprechenden Komponenten von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gelten, da alle Komponenten dieser Vektoren nichtnegativ sind. Seien nun

$$\mathbf{x}_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}, 0, \ldots, 0\right)^T, \quad \mathbf{x}_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}, 0, \ldots, 0\right)^T.$$

Da diese Punkte zulässig sind, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1^{(1)} + \mathbf{a}_2 x_2^{(1)} + \ldots + \mathbf{a}_m x_m^{(1)} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{a}_1 x_1^{(2)} + \mathbf{a}_2 x_2^{(2)} + \ldots + \mathbf{a}_m x_m^{(2)} &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ folgt daraus $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also ist $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt.

b) Aus Eckpunkt folgt Basislösung. Sei $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs mit den positiven Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$, das heißt, es gilt

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{b} \text{ mit } x_j > 0,\ j = 1, \ldots, k \leq n.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die verschwindenden Komponenten die hinteren. Es ist zu zeigen, dass $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig sind.

Der Beweis ist wieder indirekt. Wir nehmen also an, dass es ein $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ gibt mit

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_k y_k = \mathbf{0}$$

und mindestens einem $y_i \neq 0$. Für jede reelle Zahl μ gilt damit

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j \left(x_j + \mu y_j\right) = \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j \left(x_j - \mu y_j\right) = \mathbf{b}.$$

Das bedeutet, die Punkte

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (x_1 + \mu y_1, \ldots, x_k + \mu y_k, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{x}_2 &= (x_1 - \mu y_1, \ldots, x_k - \mu y_k, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

erfüllen die Nebenbedinungen (3.2). Falls man $\mu > 0$ hinreichend klein wählt, sind alle Komponenten dieser Punkte nichtnegativ und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sind zulässig. Aus der Konstruktion von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ folgt, dass $\mathbf{x} = 0.5\mathbf{x}_1 + 0.5\mathbf{x}_2$ gilt. Das ist im Widerspruch zur Eckpunktannahme von $\mathbf{x}$. Diese Darstellung für den Eckpunkt $\mathbf{x}$ kann nur existieren, wenn $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Da μ positiv ist, muss also $y_1 = \ldots = y_k = 0$ gelten. Also sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig.

Die Basislösung verlangt jedoch m linear unabhängige Vektoren:

- Fall $k > m$. $m + 1$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ sind stets linear abhänging. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
- Fall $k = m$. In diesem Fall besitzt die zulässige Basislösung m positiven Komponenten, sie ist also nicht ausgeartet.
- Fall $k < m$. In diesem Fall hat man eine zulässige Basislösung mit weniger als m positiven Komponenten, also eine ausgeartete Basislösung. Aus den restlichen Spalten von A konstruiert man eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, für welche offensichtlich

  $$\mathbf{a}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{a}_k x_k + \mathbf{a}_{k+1} 0 + \ldots \mathbf{a}_m 0 = \mathbf{b}$$

  gilt. Diese Konstruktion ist möglich, da $\mathrm{rg}(A) = m$ ist.

■

Folgerung 3.7 ***Satz 1.15.*** *Ist der Lösungsbereich*

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

beschränkt, so ist er ein konvexes Polyeder.

Beweis: Man kann nur endlich viele Mengen von m linear unabhängigen Spaltenvektoren der Matrix A bilden. (*Maximalanzahl ist Übungsaufgabe*) Mit dem eben bewiesenen Satz hat damit $\mathcal{M}$ nur endlich viele Ecken. ■

Eine weitere Folgerung des eben bewiesenen Satzes, zusammen mit Satz 2.4 ist wie folgt.

Folgerung 3.8 *Eine über einem konvexen Polyeder $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ definierte lineare Funktion $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nimmt ihr Minimum für wenigstens eine zulässige Basislösung an.*

Mit Hilfe der bisherigen Resultate können wir versuchen, ein Verfahren zur Lösung von

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ : \ \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

zu konstruieren:

1. Aufstellung der $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ linearen Gleichungssysteme der Dimension m aus $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Ist die so generierte Matrix $A_{m,m}$ regulär?
3. Angabe der Lösung für reguläre $A_{m,m}$.
4. Auswahl der zulässigen Lösungen
5. Bestimmung der Lösung(en), die das Minimum liefern.

Diese Herangehensweise ist jedoch schon bei relativ kleiner Anzahl von Unbekannten und Nebenbedingungen viel zu aufwendig. Zum Beispiel hätte man bei $n = 20$, $m = 10$ schon 184 756 Gleichungssysteme aufzustellen und diese zu untersuchen.

Das Ziel wird nun sein, ein Verfahren zu finden, welches einen cleveren Weg zum Optimum findet, unter Nutzung von zulässigen Basislösungen.