Kapitel 2

Geometrische Deutung des Linearen Programms

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich das anschauliche Merkmal des zweidimensionalen linearen Programms aus Beispiel 1.2, nämlich dass das Optimum auf dem Rand angenommen wird, verallgemeinern lässt.

Historie zur Untersuchung linearer Optimierungsprobleme:

- 1939 Leonid V. Kantorovitch (1912 – 1986); Methode der Auflösungskoeffizienten
- 1941 Frank L. Hitchcock, Transportproblem
- 1949 George Dantzig (1914 – 2005), Simplexmethode
- 1984 Narendra Karmarkar (geb. 1957), Innere–Punkt–Methoden für lineare Programme

Definition 2.1 Lineares Optimierungsproblem in 1. Normalform, lineares Programm in Normalform. Gesucht werden die Werte der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ so, dass die lineare Funktion

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{2.1}$$

die sogenannte Zielfunktion, unter den Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j &\geq b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad (A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}), & (2.2)\\ x_j &\geq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (\mathbf{x} \geq \mathbf{0}), & (2.3) \end{aligned}$$

ein Minimum annimmt. Alle Koeffizienten sind reell. Das System (2.1) – (2.3) heißt lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm in 1. Normalform. □

Bemerkung 2.2

1. Ob (2.1) in min– oder max–Form benutzt wird, ist im allgemeinen ohne Belang, in [JS04] wird beispielsweise die max–Form verwendet.
2. Die Relationen $\geq$, $=$, $\leq$ im System der Nebenbedingungen sind im wesentlichen äquivalent.
3. Fehlt zum Beispiel für einen Index k die Bedingung $x_k \geq 0$, so setzt man $x_k := \overline{x}_k - \hat{x}_k$ mit $\overline{x}_k, \hat{x}_k \geq 0$. Man erhöht damit die Anzahl der Variablen um Eins.

□

Definition 2.3 Zulässiger Punkt, zulässiger Bereich. Ein Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ heißt zulässig, wenn er die Nebenbedingungen (2.2), (2.3) erfüllt. Die Gesamtheit aller zulässigen Punkte heißt zulässiger Bereich. □

Für die Lösung von (2.1) – (2.3) kommen nur zulässige Punkte in Betracht. Der zulässige Bereich ist konvex. Ist er beschränkt, so ist er ein konvexes Polyeder. Ist der zulässige Bereich nicht beschränkt ist, dann gilt:

- entweder ist (2.1) über diesen Bereich selbst nicht beschränkt,
  Beispiel: Minimiere $-2x_1 - x_2$ im Bereich $\{(x_1, x_2)\ :\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$,
- oder (2.1) ist über dem unbeschränkten Bereich beschränkt. Dann kann man Zusatzbedingungen an den zulässigen Bereich stellen, die das Optimum nicht ändern, so dass der neue zulässige Bereich beschränkt ist.
  Beispiel: Minimiere $2x_1 + x_2$ im Bereich $\{(x_1, x_2)\ :\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Weitere Beispiele findet man in Beispiel 2.6.

Wenn von einem konvexen Polyeder gesprochen wird, ist ab sofort immer ein abgeschlossenes konvexes Polyeder gemeint.

Satz 2.4 ***Extremwertannahme.*** *Eine auf einem konvexen Polyeder definierte lineare Funktion $z = f(\mathbf{x})$ nimmt ihren kleinsten Wert in (mindestens) einem Eckpunkt an.*

Beweis: Seien $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_p$ die Eckpunkte des konvexen Polyeders $\mathcal{M}$. Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nehme ihr Minimum in $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$ an, das heißt

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

für alle Punkte $\mathbf{x}$ des konvexen Polyeders. Dass das Minimum angenommen wird, folgt nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß (stetige Funktion in einem kompakten Gebiet nimmt ihre Extremwerte an). Ist $\mathbf{x}_0$ kein Eckpunkt, so existiert eine Darstellung (Satz 1.14)

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{x}_j,\ 0 \leq \lambda_j \leq 1,\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1.$$

Aus der Linearität von f folgt

$$f\left(\mathbf{x}_0\right) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f\left(\mathbf{x}_j\right).$$

Sei ein Index l definiert durch

$$f(\mathbf{x}_l) = \min_{j=1,\ldots,p} f(\mathbf{x}_j).$$

Dann folgt

$$f\left(\mathbf{x}_0\right) \geq f(\mathbf{x}_l) \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = f(\mathbf{x}_l). \tag{2.5}$$

Wegen (2.4) und (2.5) wird das Minimum für $\mathbf{x}_l$ angenommen. ■

Folgerung 2.5 *Wird das Minimum in mehr als einem Eckpunkt des konvexen Polyeders angenommen, so wird es auf der konvexen Hülle dieser Eckpunkte angenommen.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Eckpunkte so numeriert, dass die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ ihr Minimum in den Eckpunkten $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ annehme. Die konvexe Hülle dieser Eckpunkte ist

$$\left\{ \tilde{\mathbf{x}} \ : \ \tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i, \ 0 \le \lambda_i \le 1, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Aus der Linearität von f folgt

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i \right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_1) \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = f(\mathbf{x}_1),$$

womit die Folgerung bewiesen ist. ∎

Geometrische Interpretation

Die Gleichung $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d$ mit einer vorgegebenen Konstanten d ist die Gleichung einer Hyperebene in $\mathbb{R}^n$. Für $n = 3$, hat man beispielsweise die Normalform einer Ebenengleichung, wobei $\mathbf{c}$ ein Normalenvektor der Ebene ist.

Sei $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ die Zielfunktion. Es ist gerade

$$\mathbf{c} = \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n} \right)^T.$$

Außerdem ist $\mathbf{c}$ orthogonal zu den Hyperebenen $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const$. Sei nämlich ein beliebiger Vektor einer Hyperebene gegeben, etwa zwischen den Punkten $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{x}}$, dann gilt

$$\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} = const, \ \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} = const \implies \mathbf{c}^T(\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) = 0.$$

Aus der Menge $\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const\}$ wählen wir diejenige Hyperebene, die einen vorgegebenen zulässigen Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{M}$, nicht notwendig einen Eckpunkt, enthält: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0$. Wir definieren

$$g := \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{c}, t \in \mathbb{R}\}.$$

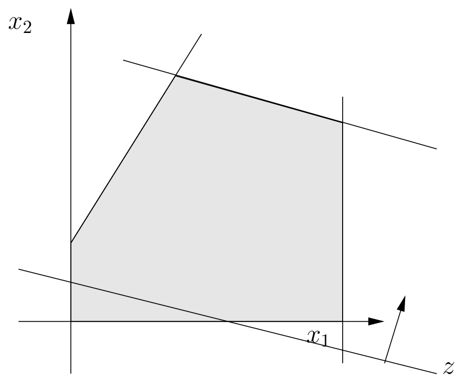
Diese Gerade enthält $\mathbf{x}_0$ und sie ist orthogonal zu $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const$. Für alle $\mathbf{x} \in g$ gilt bezüglich der Zielfunktion

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 + t\,\|\mathbf{c}\|_2^2 =: z_0 + t\,\|\mathbf{c}\|_2^2,$$

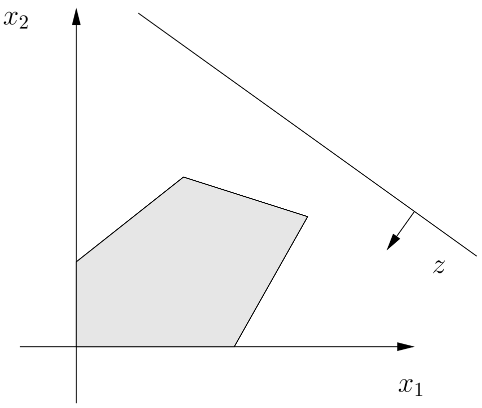
wobei z_0 der Startwert der Zielfunktion ist. Sei $t > 0$. Dann folgt $z > z_0$, das heißt, der Wert der Zielfunktion wächst streng monoton in Richtung von $\mathbf{c}$. Wenn man z zu maximieren hat, so verschiebe man die Hyperebene in Richtung ihres Gradienten. Also, ausgehend von $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ konstruiere man in Richtung von $\mathbf{c}$ eine Schar zu $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ paralleler Hyperebenen mit dem Ziel, diejenige Hyperebene aus der Schar zu finden, die $\{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ berührt mit der Eigenschaft, dass $\{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ ganz im negativen Halbraum der berührenden Hyperebene liegt. Berührung bedeutet, dass $\{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} \le \mathbf{b}, \ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} \cap \left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const\right\}$ eine Teilmenge des Randes des Polyeders ist, zum Beispiel ein Eckpunkt.

Beispiel 2.6 Beispiele für Situationen die in linearen Programmen auftreten können.

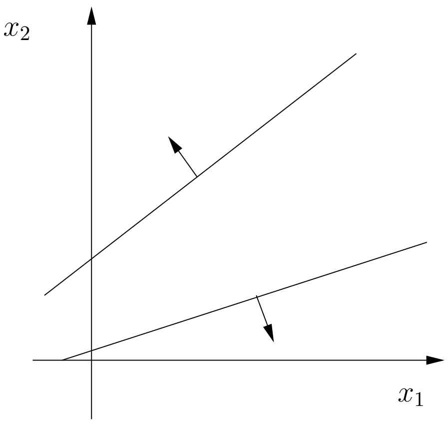
a) Es gibt unendlich viele Lösungen (eine gesamte Kante).



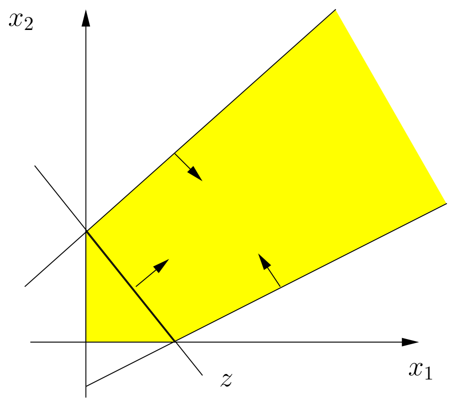
b) Es gibt überflüssig Nebenbedingungen. Die Zielfunktion nimmt ihren Extremwert in $(0, 0)$ an und die drei oberen Nebenbedingungen sind überflüssig.



c) Der zulässige Bereich ist leer.



d) Der Optimalwert ist nicht beschränkt.


x_2
z
x_1