Kapitel 1

Grundlagen

Definition 1.1 Lineares Optimierungsproblem, lineares Programm. Eine Aufgabenstellung wird lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm genannt, wenn das Extremum einer linearen Funktion

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{1.1}$$

zu bestimmen ist, über der durch das lineare Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad &\leq (>) \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m && (1.2) \\ x_j \quad &\geq \quad 0, \quad j = 1, \ldots, n, && (1.3) \end{aligned}$$

definierten Punktmenge. □

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann wird die Bezeichnung

$$\mathbf{x} \geq (>) \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \geq (>) y_i, \ \forall \ i = 1, \ldots, n,$$

verwendet.

Definition 1.2 Zulässiger Bereich. Die Menge $\mathcal{M}$ aller Punkte, die das Ungleichungssystem (1.2) – (1.3) erfüllen, heißt zulässiger Bereich. □

Beispiel 1.3 Der zulässige Bereich, der durch lineare Nebenbedingungen beschrieben ist, ist der Durchschnitt von Halbräumen. Für $n = 2$ sind das Halbebenen und ein Beispiel ist in Abbildung 1.1 zu sehen. □

Der zulässige Bereich ist nicht notwendig beschränkt. Er kann auch leer sein.

Definition 1.4 Konvexität. Eine Punktmenge $\mathcal{M}$ heißt konvex, wenn mit beliebigem $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ auch alle Punkte der Gestalt

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \ 0 \leq \lambda \leq 1,$$

zu $\mathcal{M}$ gehören. □

Für den $\mathbb{R}^n$ bedeutet Konvexität, dass mit zwei Punkten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ aus $\mathcal{M}$ auch ihre Verbindungsstrecke in $\mathcal{M}$ liegt.

Satz 1.5 *Die durch das lineare Ungleichungssystem (1.2) – (1.3) definierte Punktmenge ist konvex.*

Beweis: Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ gegeben. Dann gelten

$$A\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b},\ \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0},\ A\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b},\ \mathbf{x}_2 \ge \mathbf{0}.$$

Mit $\lambda \in [0,1]$ gelten

$$\lambda A\mathbf{x}_1 \le \lambda\mathbf{b}, \quad (1-\lambda)A\mathbf{x}_2 \le (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

Addition und Linearität der Matrizenmultiplikation ergibt

$$A\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \le \mathbf{b}.$$

Analog folgt

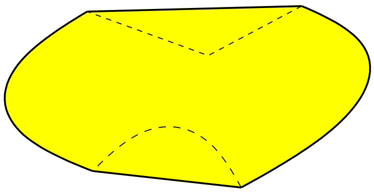
$$\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ge \mathbf{0}.$$

■

Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist wieder konvex. *Übungsaufgabe*

Definition 1.6 Konvexe Hülle. Die kleinstmögliche konvexe Menge $\overline{\mathcal{M}}$, die eine vorgegebene Punktmenge $\mathcal{P}$ enthält, heißt deren konvexe Hülle. □

Beispiel 1.7 Die dick umrandete Menge ist die konvexe Hülle der gestrichelt umrandeten Menge.



□

Beispiel 1.8 Die Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{1}{n} \ :\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

ist nicht konvex, da sie aus diskreten Punkten besteht. Ihre konvexe Hülle ist $(0,1]$. □

Definition 1.9 Konvexe Linearkombination. Gegeben seien q Punkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$. Betrachtet werden alle Punkte der Gestalt

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad 0 \le \lambda_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1. \tag{1.4}$$

Dann heißt die mit (1.4) erklärte Menge konvexe Linearkombination der Punkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$. □

Welche Punkte einer konvexen Menge sollen ausgezeichnet werden?

Definition 1.10 Eckpunkt oder Extrempunkt einer konvexen Menge. Gegeben sei eine konvexe Menge $\mathcal{M}$. Der Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ heißt Eckpunkt oder Extrempunkt von $\mathcal{M}$, wenn aus $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$, $0 < \lambda < 1$, folgt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. □

Man sagt, $\mathbf{x}$ lässt sich nicht als *echte* konvexe Linearkombination von Punkten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ darstellen.

Beispiel 1.11 Bei einem Viereck im $\mathbb{R}^2$ sind die Eckpunkte gerade die vier Ecken. Bei einer Kugel im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sind alle Randpunkte Eckpunkte. □

Definition 1.12 Konvexes Polyeder. Eine beschränkte konvexe Menge $\mathcal{M} \neq \emptyset$ mit endlich vielen Eckpunkten heißt konvexes Polyeder. □

Beispiel 1.13 Konvexe Polyeder in $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$. Ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^1$ ist ein abgeschlossenes Intervall. In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann man sich konvexe Polyeder noch gut vorstellen. Ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ findet man in Abbildung 1.1. □

Satz 1.14 *Sei $\mathcal{M}$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge, $\mathcal{P}$ sei die Menge der Eckpunkte von $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{M}$ die konvexe Hülle von $\mathcal{P}$.*

Beweis: Literatur. Beweisidee mit trennenden Hyperebenen siehe [ERSD77, Satz 2.48]. ■

Satz 1.15 *Ist der Lösungsbereich*

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

beschränkt, so ist er ein konvexes Polyeder.

Beweis: Siehe später, Folgerung 3.7. ■