Kapitel 10

Die duale Simplexmethode

Bei der dualen Simplexmethode ist eine Startlösung oftmals leichter angebbar als bei der Simplexmethode für das ursprüngliche lineare Programm, da man keine Nichtnegativitätsanforderungen zu erfüllen hat. Des weiteren ist die duale Simplexmethode ein wichtiges Verfahren zur Lösung von ganzzahligen linearen Programmen, d.h., von linearen Programmen, bei denen die Lösung ganzzahlig sein soll.

Seien

$$\begin{aligned} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \text{min !} \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0} \end{aligned} \tag{10.1}$$

das primale Programm und

$$\begin{aligned} \tilde{z} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} &\rightarrow \text{max !} \\ A^T\mathbf{y} &\leq \mathbf{c} \end{aligned} \tag{10.2}$$

das zugehörige duale Programm. Wir setzen voraus, dass $\tilde{z}$ endlich ist.

Definition 10.1 Ecklösung. *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei* $A_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ *eine Basis. Ein Punkt* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_m)^T$ *heißt Ecklösung von (10.2), wenn*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} &= c_i \quad \text{für } i = 1, \ldots, m, \\ \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} &< c_i \quad \text{für } i = m+1, \ldots, n \end{aligned} \tag{10.3}$$

gilt. □

Das heißt, die Nebenbedingungen, die durch die Basisvektoren von A_B gegeben sind, sind mit Gleichheit erfüllt und die Nebenbedingungen mit den Nichtbasisvektoren als echte Ungleichung.

Seien A_B^{-1} die Inverse von A_B mit der Darstellung

$$A_B^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix}, \quad \text{dass heißt} \quad \mathbf{b}_i\mathbf{a}_j = \delta_{ij}$$

und $\mathbf{y} = y_1\mathbf{a}_1 + \ldots + y_m\mathbf{a}_m \in \mathbb{R}^m$ ein beliebiger Vektor. Dann folgt (man beachte, die $\mathbf{b}_i$ sind Zeilenvektoren)

$$\mathbf{b}_i\mathbf{y} = y_1\mathbf{b}_i\mathbf{a}_1 + \ldots + y_m\mathbf{b}_i\mathbf{a}_m = y_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Daraus erhält man insbesondere die Darstellung

$$\mathbf{y} = (\mathbf{b}_1\mathbf{y})\,\mathbf{a}_1 + \ldots + (\mathbf{b}_m\mathbf{y})\,\mathbf{a}_m. \tag{10.4}$$

Die Ausartung in der dualen Simplexmethode, die im folgenden Satz ausgeschlossen ist, wird in seinem Beweis definiert, siehe auch Bemerkung 10.3.

Satz 10.2 Hauptsatz der dualen Simplexmethode. *Sei $\tilde{z}$ nach oben beschränkt und sei Ausartung ausgeschlossen. Ist $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ eine Ecklösung und gilt $\mathbf{b}_i\mathbf{b} < 0$ für wenigstens ein $i = 1, \ldots, m$, so existiert eine Ecklösung $\bar{\mathbf{y}}$ mit größerem Wert der Zielfunktion $\tilde{z}$.*

Beweis: Seien $\mathbf{y}$ eine Ecklösung, $\mathbf{b}_l\mathbf{b} < 0$ und $\theta > 0$ beliebig. Es wird ein $\bar{\mathbf{y}}$ konstruiert, welches die Bedingungen des Satzes erfüllt.

Man bildet

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \theta\mathbf{b}_l^T.$$

Aus der Eckpunkteigenschaft (10.3) folgt

$$\mathbf{a}_i^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} - \theta\underbrace{\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T}_{=0} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} = c_i, \quad i = 1, \ldots, m,\ i \neq l, \tag{10.5}$$

$$\mathbf{a}_l^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{a}_l^T\mathbf{y} - \theta\underbrace{\mathbf{a}_l^T\mathbf{b}_l^T}_{=1} = \mathbf{a}_l^T\mathbf{y} - \theta < c_l. \tag{10.6}$$

Es ist auch

$$\mathbf{a}_i^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} - \theta\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T < c_i, \quad i = m+1, \ldots, n,$$

und für wenigstens einen Index i gilt $\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T < 0$. Anderenfalls, falls also $\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T > 0$ für $i = m+1, \ldots, n$, sind die Nebenbedingungen für beliebig großes θ erfüllt. Damit wäre

$$\tilde{z} = \mathbf{b}^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b}^T\mathbf{y} - \theta\ \underbrace{\mathbf{b}^T\mathbf{b}_l}_{<0 \text{ n.V.}}$$

unbeschränkt im Widerspruch zur Voraussetzung.

Wir wählen

$$\theta = \min_{i=m+1,\ldots,n;\mathbf{b}_l\mathbf{a}_i<0}\left(\frac{\mathbf{a}_i^T\mathbf{y} - c_i}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_i}\right). \tag{10.7}$$

Wir nehmen an, dass θ für genau einen Index $i = k$ angenommen wird. Sonst hat man Ausartung. Es gilt:

1.) $\bar{\mathbf{y}}$ erfüllt (10.5) und (10.6), das heißt, die Basisvektoren die in der Basis verbleiben erfüllen die Nebenbedingung mit Gleichheit und die neu Nichtbasisvariable mit Index l als echte Ungleichung.

2.) Für den Index k, der in die Basis aufgenommen werden soll, gilt

$$\mathbf{a}_k^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{a}_k^T\mathbf{y} - \frac{\mathbf{a}_k^T\mathbf{y} - c_k}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k = c_k,$$

3.) Aus der Wahl von θ folgt

$$\mathbf{a}_i^T\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{a}_i^T\mathbf{y} - \theta\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T < c_i, \quad i = m+1, \ldots, n,\ i \neq k.$$

Falls $\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T$ nichtnegativ ist, ist das Erfülltsein dieser Bedingung klar. Ansonsten wurde bei der Wahl von θ gerade der Index k ausgewählt, der die k–te Nebenbedingung $\mathbf{a}_k^T\mathbf{b}_l^T < 0$ für $\bar{\mathbf{y}}$ zu einer Gleichung werden lässt, ohne dass die anderen Nebenbedingungen mit $\mathbf{a}_i^T\mathbf{b}_l^T < 0$ verletzt werden.

Aus 1) – 3) folgt, dass $\bar{\mathbf{y}}$ eine Ecklösung ist. Ferner gilt

$$\tilde{z} = \mathbf{b}^T \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} - \theta \mathbf{b}^T \mathbf{b}_l^T > \mathbf{b}^T \mathbf{y}.$$

■

Bemerkung 10.3 *Ausartung im dualen Programm.* Ist der Index k bei der Wahl von θ in (10.7) nicht eindeutig, so liegt Ausartung vor. □

Bemerkung 10.4 *Unbeschränktheit der Zielfunktion.* Die Unbeschränktheit der Zielfunktion $\tilde{z}$ ist an $\mathbf{a}_j^T \mathbf{b}_l^T \geq 0$ für $j = m+1, \ldots, n$ zu erkennen. □

Satz 10.5 Optimalitätskriterium. *Sei* $\mathbf{y}$ *eine Ecklösung von (10.2) und gelte* $\mathbf{b}_i \mathbf{b} \geq 0$ *für alle* $i = 1, \ldots, m$. *Dann ist* $\mathbf{y}$ *die Optimallösung von (10.2) und die Größen* $x_i = \mathbf{b}_i \mathbf{b}$ *stellen die Basisvariablen der Optimallösung des primalen Problems (10.1) dar.*

Beweis: Es gilt mit (10.3)

$$z = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i = \sum_{i=1}^{m} c_i \mathbf{b}_i \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{y}^T \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \mathbf{b} = \mathbf{y}^T \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i \right)}_{=I_m} \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{y} = \tilde{z}.$$

Nach dem starken Dualitätssatz, Satz 9.4, folgt die Aussage des Satzes.

Bemerkung zur Summe: Sei $\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_i = C$ mit einer unbekannten Matrix C. Multiplikation diese Gleichung von rechts mit $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \ldots, m$, ergibt

$$C\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i \underbrace{\mathbf{b}_i \mathbf{a}_j}_{=\delta_{ij}} = \mathbf{a}_j$$

für alle $\mathbf{a}_j$. Da die $\mathbf{a}_j$ eine Basis des $\mathbb{R}^m$ bilden, gilt $C = I_m$. ■

Die duale Simplextabelle hat die Gestalt

			$m+1$	$\ldots$	k	$\ldots$	n
i	c_i	Lösung	c_{m+1}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_n
1	c_1	$\mathbf{b}_1\mathbf{b}$	$\mathbf{b}_1\mathbf{a}_{m+1}$	$\ldots$	$\mathbf{b}_1\mathbf{a}_k$	$\ldots$	$\mathbf{b}_1\mathbf{a}_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	c_l	$\mathbf{b}_l\mathbf{b}$	$\mathbf{b}_l\mathbf{a}_{m+1}$	$\ldots$	$\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k$	$\ldots$	$\mathbf{b}_l\mathbf{a}_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_m	$\mathbf{b}_m\mathbf{b}$	$\mathbf{b}_m\mathbf{a}_{m+1}$	$\ldots$	$\mathbf{b}_m\mathbf{a}_k$	$\ldots$	$\mathbf{b}_m\mathbf{a}_n$
		$\tilde{z}$	$\mathbf{a}_{m+1}^T\mathbf{y} - c_{m+1}$	$\ldots$	$\mathbf{a}_k^T\mathbf{y} - c_k$	$\ldots$	$\mathbf{a}_n^T\mathbf{y} - c_n$

Wie bei der Simplexmethode, wird die Zeile l Hauptzeile und die Spalte k Hauptspalte genannt. Das Pivotelement ist $\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k$. Aus den Nebenbedingungen des dualen linearen Programms (10.2) folgt, dass die Einträge in der letzten Zeile im Nichtbasisteil nichtpositiv sind.

Bemerkung 10.6

- In der Schlusszeile stehen die Größen, die man zur Berechnung von θ in (10.7) benötigt.

- Die Spalte *Lösung* enthält eine Basislösung des primalen Problems. Sei $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^m$ der Vektor mit den Basisvariablen des primalen Problems. Aus den Nebenbedingungen des primalen Problems folgt

$$A_B \tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad \Longrightarrow \quad \tilde{\mathbf{x}} = A_B^{-1}\mathbf{b} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m\mathbf{b} \end{pmatrix}.$$

  Diese Basislösung ist im allgemeinen nicht zulässig, da sie negative Komponenten besitzt. Gilt jedoch $\mathbf{b}_i\mathbf{b} \geq 0$ für alle $i = 1, \ldots, m$, dann ist sie primale Optimallösung.
- Die Nichtbasisvektoren lassen sich als Linearkombination der Basisvektoren darstellen $\mathbf{a}_j = A_B\mathbf{a}$ mit einem unbekannten Koeffizientenvektor $\mathbf{a}$. Dieser lässt sich durch $\mathbf{a} = A_B^{-1}\mathbf{a}_j$ berechnen, was in Komponentenschreibweise zu

$$\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{m} (\mathbf{b}_i\mathbf{a}_j)\,\mathbf{a}_i, \quad j = m+1, \ldots, n$$

  führt, siehe (10.4).
- Falls man das Optimum des dualen Problems mit der dualen Simplexmethode gefunden hat, ist die Tabelle der dualen Simplexmethode eine Optimaltabelle für die primale Aufgabe.

$\square$

Falls in der Spalte *Lösung* wenigstens ein $\mathbf{b}_i\mathbf{b} < 0$ steht, zum Beispiel für $i = l$, so transformiert man wie folgt:
- Setze $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}$.
- Vertausche die Indizes l und k.
- Pivotelement: $\hat{\mathbf{b}}_k\mathbf{a}_l = 1/(\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k)$
- Hauptspalte:

$$\hat{\mathbf{b}}_i\mathbf{a}_l = -\frac{\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}, \quad i = 1, \ldots, m, \ i \neq l,$$

- Hauptzeile:

$$\hat{\mathbf{b}}_k\mathbf{a}_j = \frac{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_j}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}, \quad j = 0, m+1, \ldots, n, \ j \neq k,$$

- Rechteckregel:

$$\hat{\mathbf{b}}_i\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i\mathbf{a}_j - \frac{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_j}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k, \quad i = 1, \ldots, m, \ i \neq l, \ j = 0, m+1, \ldots, n, \ j \neq k.$$

Die Rechteckregel wird auch auf die letzte Zeile angewandt *Übungsaufgabe*. Das sind dieselben Regeln wie im primalen Fall !

Bemerkung 10.7 *Begründung der Transformationsregeln:* Seien $A_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$

und $\hat{A}_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{l+1}, \ldots, \mathbf{a}_m)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
A_B^{-1}\hat{A}_B &= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{l+1}, \ldots, \mathbf{a}_m) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_1\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{b}_1\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{b}_1\mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b}_l\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_l\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{b}_l\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{b}_l\mathbf{a}_m \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{b}_m\mathbf{a}_1 & \mathbf{b}_m\mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{b}_m\mathbf{a}_k & \cdots & \mathbf{b}_m\mathbf{a}_m \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{b}_1\mathbf{a}_k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \mathbf{b}_2\mathbf{a}_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{b}_l\mathbf{a}_k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathbf{b}_m\mathbf{a}_k & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =: I_m^{(k)}.
\end{aligned}$$

Sei

$$\left(\hat{A}_B\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_m \end{pmatrix},$$

dann ist

$$A_B^{-1} = I_m^{(k)} \left(\hat{A}_B\right)^{-1},$$

oder

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_l \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{b}}_1 + (\mathbf{b}_1\mathbf{a}_k)\hat{\mathbf{b}}_k \\ \vdots \\ (\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k)\hat{\mathbf{b}}_k \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{b}}_m + (\mathbf{b}_m\mathbf{a}_k)\hat{\mathbf{b}}_k \end{pmatrix}.$$

Damit stehen die Transformationsregeln da. Für das Pivotelement gilt

$$\hat{\mathbf{b}}_k = \frac{\mathbf{b}_l}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k} \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{b}}_k\mathbf{a}_l = \frac{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_l}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k} = \frac{1}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}.$$

Für die Hauptspalte erhält man daraus

$$\hat{\mathbf{b}}_i = \mathbf{b}_i - (\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k)\,\hat{\mathbf{b}}_k \quad \Longrightarrow \quad \hat{\mathbf{b}}_i\mathbf{a}_l = \mathbf{b}_i\mathbf{a}_l - (\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k)\left(\hat{\mathbf{b}}_k\mathbf{a}_l\right) = 0 - \frac{\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k} \quad i \neq l.$$

Für die Hauptzeile ergibt sich umittelbar

$$\hat{\mathbf{b}}_k\hat{\mathbf{a}}_j = \frac{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_j}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}, \qquad j = 0, m+1, \ldots, n,\ j \neq k.$$

Die Rechteckregel ergibt sich damit

$$\hat{\mathbf{b}}_i\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i\mathbf{a}_j - \mathbf{b}_i\mathbf{a}_k\hat{\mathbf{b}}_k\mathbf{a}_j = \mathbf{b}_i\mathbf{a}_j - \frac{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_j}{\mathbf{b}_l\mathbf{a}_k}\mathbf{b}_i\mathbf{a}_k.$$

□

Beispiel 10.8 Wir betrachten noch einmal das Problem aus Beispiel 5.2:

$$\begin{aligned} z = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 \quad &\rightarrow \quad \min\ ! \\ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} \quad &\geq \quad \mathbf{0}. \end{aligned}$$

In Beispiel 5.2 hatten wir die Optimallösung $\mathbf{x} = (320, 0, 20, 40, 0, 0, 0)^T$ mit $z = -1080$ erhalten. Das duale Problem zum obigen linearen Programm lautet

$$\begin{aligned} \tilde{z} = 700y_1 + 400y_2 + 500y_3 \quad &\rightarrow \quad \max\ ! \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad &\leq \quad \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wir nehmen uns die erste, dritte und fünfte Nebenbedingung des dualen Problems her und betrachte diese Bedingungen als Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11/5 \\ -4/5 \end{pmatrix}.$$

Durch Einsetzen in die Nebenbedingungen verifiziert man, dass man damit eine Ecklösung des dualen Problems gefunden hat. Es ist

$$\begin{aligned} A_B \quad &= \quad (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 \\ 1 & -7/5 & -3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_3 \\ \mathbf{b}_5 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{b} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit sind alle Größen für die duale Simplextabelle bestimmt:

			2	4	6	7
i	c_i	Lösung	-2	-1	0	0
1	-3	400	3	2	1	0
3	-4	20	-2/5	0	-1/5	1/5
5	0	-160	-14/5	-4	-7/5	-3/5
		-1280	-27/5	-5	-11/5	-4/5

Die Lösung ist nicht optimal, da $-160 < 0$. Damit ist $l = 5$ die Hauptzeile. Zur Bestimmung der Hauptspalte berechnet man

$$\theta = \min_{j \in \{2,4,6,7\},\ \mathbf{b}_l \mathbf{a}_j < 0} \left(\frac{\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} - c_j}{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_j} \right) = \min \left\{ \frac{27}{14}, \frac{5}{4}, \frac{11}{7}, \frac{4}{3} \right\} = \frac{5}{4}.$$

Damit ist die Hauptspalte $k = 4$. Mit den Transformationsregeln der Simplexmethode erhält man die neue duale Simplextabelle

			2	5	6	7
i	c_i	Lösung	-2	0	0	0
1	-3	320	8/5	1/2	3/10	-3/10
3	-4	20	-2/5	0	-1/5	1/5
4	-1	40	7/10	-1/4	7/20	3/20
		-1080	-19/10	-5/4	-9/20	-1/20

Damit ist das Optimum bestimmt. Die Optimallösung des primalen Problems findet man in der Spalte *Lösung* ebenso den zugehörigen Zielfunktionswert.

Die Lösung des dualen Problems $\mathbf{y}$ kann man im allgemeinen nicht direkt aus der dualen Simplextabelle ablesen. In der letzten Zeile steht nämlich $\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} - c_j$. Das direkte Ablesen geht nur, wenn $c_j = 0$ und die $\mathbf{a}_j$ Einheitsvektoren sind. Das ist in diesem Beispiel gegeben, nämlich für die Indizes $5, 6, 7$. Die Lösung des dualen Problems ist also $\mathbf{y} = (-5/4, -9/20, -1/20)^T$, mit dem Zielfunktionswert $\tilde{z} = -1080$. Im allgemeinen muss man noch ein lineares Gleichungssystem lösen, um die Lösung des dualen Problems zu berechnen. $\square$

Kapitel 11

Die duale Simplexmethode zur Lösung rein ganzzahliger linearer Programme

Wir betrachten folgendes Optimierungsproblem

$$\begin{aligned}
z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} &\rightarrow \text{min !} \\
A\mathbf{x} &= \mathbf{b} && (11.1)\\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0} && (11.2)\\
x_j & \quad \text{ganz für } j = 1, \ldots, n_1 \leq n, && (11.3)\\
a_{ij}, b_i & \quad \text{ganz für } i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n. && (11.4)
\end{aligned}$$

Definition 11.1 Ganzzahliges lineares Programm. *Das lineare Programm (11.1) – (11.4) heißt rein ganzzahliges lineares Programm falls $n_1 = n$. Ansonsten heißt es für $n_1 > 0$ gemischt ganzzahliges lineares Programm.* □

Bemerkung 11.2 Häufig enthalten ganzzahlige lineare Programme Bedingungen der folgenden Art

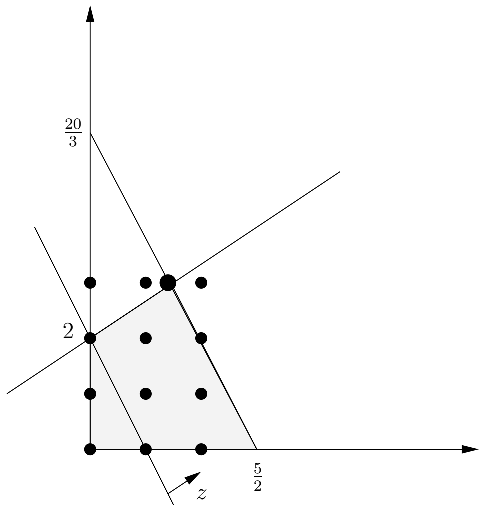
$$0 \leq x_j \leq 1, \quad x_j \text{ ganz},$$

für gewisse Indizes j. □

Beispiel 11.3 Wir betrachten

$$\begin{aligned}
z = -8x_1 - 4x_2 &\rightarrow \text{min !}\\
-2x_1 + 3x_2 &\leq 6\\
8x_1 + 3x_2 &\leq 20\\
\mathbf{x} &\geq 0\\
x_1, x_2 & \quad \text{ganz.}
\end{aligned}$$

Das Problem ohne die Ganzheitsforderung kann man graphisch lösen, siehe Abbildung.



Das stetige Optimum ist

$$\mathbf{x} = \left(\frac{7}{5}, \frac{44}{15}\right), \quad z = -\frac{344}{15}.$$

Eine einfache Herangehensweise zur Bestimmung des ganzzahligen Optimums ist Runden. Man erhält damit $\mathbf{x} = (1,3)^T$. Dieser Punkt ist jedoch nicht zulässig. Durch Abrunden folgt $\mathbf{x} = (1,2)^T$. Man erhält mit diesem Punkt den Zielfunktionswert $z = -16$. Dieser ist jedoch nicht optimal, da man mit $\mathbf{x} = (2,1)^T$ den Wert $z = -20$ erhält.

Runden ist also keine geeignete Lösungstechnik. □

Mit dem normalen Simplexverfahren kann man nicht arbeiten, da das Optimum ein innerer Punkt des zulässigen Bereiches ist. Das könnte man durch die Bestimmung der konvexen Hülle aller zulässigen Punkte ändern. Dieses Vorgehen ist aber im allgemeinen viel zu aufwendig. Stattdessen versucht man in der Nähe des stetigen Optimums durch Abschneiden den gesuchten ganzzahligen optimalen Punkt zu einem Eckpunkt zu machen. Dieses Schnittprinzip soll jetzt auf eine Art (nach Gomory (1957)) realisiert werden.

Definition 11.4 Schnittbedingung. *Die Nebenbedingung*

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \le \beta \tag{11.5}$$

heißt Schnittbedingung, wenn folgendes erfüllt ist:

i) Es sei $\mathbf{x}^{(0)}$ ein Optimum mit den Nebenbedingungen (11.1) – (11.2). Dann erfüllt $\mathbf{x}^{(0)}$ die Bedingung (11.5) nicht, das heißt

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j^{(0)} > \beta.$$

ii) Jede Lösung, die die Nebenbedingungen (11.1) – (11.4) erfüllt (11.5), das heißt

$$\{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \text{ erfüllt } (11.1) - (11.4)\} \subset \{\mathbf{x} \ : \ \mathbf{x} \text{ erfüllt } (11.5)\}.$$

□

Jetzt soll (11.1) – (11.4) durch die Einführung von Schnittbedingungen gelöst werden. Es sei dazu zuerst (11.1) – (11.2) mit Hilfe der Simplexmethode gelöst. Das Optimum sei $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_m^{(0)}, 0, \ldots, 0)^T$. Dabei sei wenigstens ein $x_i^{(0)}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, nicht ganz.

Sei $A_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ die Matrix der Basisvektoren. Die Auflösung von (11.1) nach den Basisvariablen liefert für jedes zulässige $\mathbf{x}$ die Darstellung

$$x_i = \alpha_i + \alpha_{i,m+1}(-x_{m+1}) + \ldots + \alpha_{i,n}(-x_n), \quad i = 1, \ldots, m. \tag{11.6}$$

Lemma 11.5 *Die Koeffizienten von (11.6) bilden eine optimale Simplextabelle.*

Beweis: Wir betrachten die Nebenbedingung (11.1) und zerlegen $A = (A_B|A_N)$ sowie $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_B|\mathbf{x}_N)^T$. Wir wissen, dass $A_N = A_B X$, wobei X die Einträge der Simplextabelle sind. Aus

$$A_B\mathbf{x}_B + A_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$$

folgt

$$\mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} + A_B^{-1}A_N(-\mathbf{x}_N) = \underbrace{A_B^{-1}\mathbf{b}}_{\alpha_i} + \underbrace{X(-\mathbf{x}_N)}_{\text{Rest von (11.6)}} .$$

■

Sei jetzt für $i = p$ die Variable $x_p^{(0)}$ nicht ganz, $i \in \{1, \ldots, m\}$. Falls mehrere $x_i^{(0)}$ nicht ganz sind, wähle man einen dieser Indizes. Welches der beste ist, ist im allgemeinen nicht zu beantworten. Das ist in Analogie zur Simplexmethode bezüglich der Auswahl von $z_k - c_k > 0$.

Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnen wir

$$[a] = \mathrm{INT}(a), \quad \{a\} = a - [a]\,,$$

wobei $\mathrm{INT}(a)$ der größte ganzzahlige Bestandteil von a ist. Es gilt $\{a\} \in [0,1)$. Insbesondere gilt $\left\{x_p^{(0)}\right\} > 0$. Da für das Optimum die Komponenten mit den Indizes $m+1, \ldots, n$ verschwinden, folgt damit auch

$$\alpha_p = \underbrace{\left[x_p^{(0)}\right]}_{\geq 0} + \underbrace{\left\{x_p^{(0)}\right\}}_{>0} > 0.$$

Satz 11.6 *Die Bedingung*

$$s_1 = -\{\alpha_p\} - \{\alpha_{p,m+1}\}(-x_{m+1}) - \ldots - \{\alpha_{p,n}\}(-x_n), \quad s_1 \geq 0 \tag{11.7}$$

stellt eine Schnittbedingung gemäß Definition 11.4 dar.

Beweis: Die Bedingungen von Definition 11.4 müssen geprüft werden. Wir fügen die Bedingung (11.7) zum System der Nebenbedingungen (11.1), (11.2) hinzu und setzen $\mathbf{x}^{(0)}$ ein. Aus (11.5) folgt für $\mathbf{x}^{(0)}$

$$s_1 = -\alpha_p < 0,$$

also ist $\mathbf{x}^{(0)}$ nicht zulässig.

Nun ist zu zeigen, dass mit (11.7) keine bezüglich (11.1) – (11.4) zulässiger Punkt weggeschnitten wird. Sei $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n)^T$ ein Punkt, der (11.1) – (11.4) erfüllt. Dann folgt aus (11.7)

$$s_1 = -\underbrace{(\alpha_p - [\alpha_p])}_{\in[0,1)} - \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{(\alpha_{p,j} - [\alpha_{p,j}])}_{\in(0,1)}\underbrace{(-\tilde{x}_j)}_{\leq 0}.$$

Damit ist $s_1 > -1$. Andererseits gilt

$$s_1 = \underbrace{[\alpha_p] + \sum_{j=m+1}^{n} [\alpha_{p,j}]\,(-\tilde{x}_j)}_{\in\mathbb{Z}} \underbrace{-\alpha_p - \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{p,j}\,(-\tilde{x}_j)}_{(11.6)=-\tilde{x}_p\in\mathbb{Z}}.$$

Damit ist $s_1 \in \mathbb{Z}$. Da $s_1 > -1$ folgt $s_1 \geq 0$. ∎

Man hat mit der Schnittbedingung (11.7) das Optimum bezüglich der Nebenbedingungen (11.1), (11.2) abgeschnitten, ohne dabei auch ganzzahlige Lösungen wegzuschneiden. Folgendes lineare Programm ist jetzt zu lösen:

$$\begin{array}{rcl} z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} & \to & \text{min !} \\ A\mathbf{x} & = & \mathbf{b} \\ s_1 & = & -\{\alpha_p\} - \displaystyle\sum_{j=m+1}^{n} \{\alpha_{p,j}\}\,(-x_j) \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ s_1 & \geq & 0. \end{array} \tag{11.8}$$

Zur Lösung von (11.8) betrachtet man

$$x_i = \alpha_i, \quad i = 1,\ldots,m, \quad s_1 = -\alpha_p. \tag{11.9}$$

Das ist eine dual zulässige Lösung. *Übungsaufgabe* Die Lösung von (11.8) basiert auf der dual zulässigen Lösung (11.9) und der dualen Simplexmethode. Eventuell ist die Einführung weiterer Schnittbedingungen nötig.

Beispiel 11.7 Wir betrachten das lineare Programm

$$\begin{array}{rcl} z = -x_1 - 2x_2 & \to & \text{min !} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \\ \mathbf{x} & & \text{ganz.} \end{array}$$

Die optimale duale Simplextabelle ist

			3	4
i	c_i	Lösung	0	0
1	-1	5/3	1/3	-1/3
2	-2	$\boxed{20/3}$	1/3	2/3
5	0	7/3	-1/3	1/3
		-15	-1	-1

Die Lösung ist optimal, aber nicht ganzzahlig. Heuristisch wählt man $\{\alpha_p\}$ möglichst groß, hier zum Beispiel 2/3. Es besteht allerdings die Gefahr, dass man an der falschen Stelle abschneidet. Die Schnittbedingung lautet, siehe Lemma 11.5 für die Koeffizienten $\alpha_{p,j}$,

$$s_1 = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(-x_3) - \frac{2}{3}(-x_4) \geq 0.$$

Damit erhält man die neue duale Simplextabelle

i	c_i	Lösung	3 0	4 0
1	-1	5/3	1/3	-1/3
2	-2	20/3	1/3	2/3
5	0	7/3	-1/3	1/3
s_1	0	-2/3	-1/3	$\boxed{\text{-2/3}}$
		-15	-1	-1

Die Hauptzeile ist die Zeile von s_1. Aus

$$\theta = \min_{j \in \{3,4\}} \left\{ \frac{-1}{-1/3}, \frac{-1}{-2/3} \right\} = \frac{3}{2}$$

folgt, dass $k = 4$ die Hauptspalte ist. Der Simplexschritt führt zu folgender Tabelle

i	c_i	Lösung	3 0	s_1 0
1	-1	2	-1/2	-1/2
2	-2	6	0	1
5	0	2	-1/2	1/2
4	0	1	1/2	-3/2
		-14	-1/2	-3/2

Damit hat man die Optimallösung des ganzzahligen linearen Programms gefunden.

In der Praxis sind im allgemeinen mehr Schnittbedingungen nötig. Die Endlichkeit des Verfahrens ist nicht gesichert. □