

## Kapitel 6

# Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung

Ein Problem, was man für die Durchführung der Simplexmethode lösen muss, ist die Bestimmung einer ersten zulässigen Basislösung. Wie gut das geht, hängt auch vom konkreten Problem ab.

1. Fall. Liegt

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

vor und gilt  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$ . Dann führt man Schlupfvariablen ein und setzt  $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, \mathbf{b}^T)^T$ .

2. Fall. Liegt das lineare Optimierungsproblem in der Gestalt

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} : \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

vor mit  $A = (a_{ij}), i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n, \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)^T, a_{ij} \geq 0, b_i \geq 0$  für alle  $i, j$ . Dann kann man mit einer sogenannten Engpassmethode zur ersten zulässigen Basislösung gelangen:

1. Ordne die Variablen nach wachsenden Zielfunktionskoeffizienten  $c_i$ , Beispiel

$$\begin{aligned} z = -10x_1 - 6x_2 - 4x_3 - 3x_4 - 5x_5 &\rightarrow \min ! \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 20 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x} &\geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Dann ist die Ordnung  $x_1, x_2, x_5, x_3, x_4$ .

2. In der festgelegten Reihenfolge werden die Variablen mit dem größtmöglichen Wert genommen, so dass die Nebenbedingungen erfüllt sind. Im Beispiel beginnt man mit  $x_1 = 3$
3. Man setzt diesen Wert ein und entfernt die Variable damit aus den Nebenbedingungen. Im Beispiel ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Gleichung folgt  $x_2 = x_3 = x_7 = 0$ , welche Werte man auch gleich einsetzen kann. Damit vereinfacht sich das System der Nebenbedingungen zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (6.1)$$

4. Gehe zu 2.

Im Beispiel betrachtet man als nächstes  $x_5$ , da ja bereits  $x_2 = 0$  gilt. Der maximale Wert von  $x_5$ , so dass (6.1) erfüllt ist, beträgt  $x_5 = 1$ . Einsetzen ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_4 \\ x_6 \\ x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Damit folgt  $x_6 = 0$ . Da ja auch schon  $x_3 = 0$  gilt, wird nun  $x_4$  betrachtet. Der maximale Wert von  $x_4$ , so dass (6.2) erfüllt ist, ist  $x_4 = 2$ . Man erhält

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_8 \\ x_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nun bestimmt man die letzten beiden Werte und erhält als erste zulässige Basislösung  $\mathbf{x} = (3, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 0, 2)^T$ .

**Bemerkung 6.1** Hat man bei der Engpassmethode nicht genügend Variablen, dann führt man künstliche Variablen ein.  $\square$

**Bemerkung 6.2** *Anderes Ordnungsprinzip der Variablen im Fall, dass die Koeffizienten von unterschiedlicher Größenordnung sind.* Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$z = 10x_1 + 20x_2 + 30x_3 + 40x_4 + 50x_5 \rightarrow \min !$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 10 & 50 & 1 & 0 \\ 2 & 20 & 50 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 101 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Nach dem obigen Ordnungsprinzip hat man die Reihenfolge  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  und erhält mit der Engpassmethode die erste zulässige Basislösung *Übungsaufgabe*

$$x_1 = \frac{101}{2}, x_4 = \frac{99}{2} \implies z_0 = 2485.$$

Man erhält jedoch mit einer anderen Basislösung einen schon viel kleineren Zielfunktionswert

$$x_3 = 2, x_5 = 1 \implies z_0 = 110.$$

In diesem Fall ist das Ordnungsprinzip

$$\min_{j, c_j \neq 0} \left\{ c_j \min_{i, a_{ij} \neq 0} \left\{ \frac{b_i}{a_{ij}} \right\} \right\}$$

günstiger.  $\square$

3. Fall. Die erste zulässige Basislösung soll jetzt

- ohne spezielle Voraussetzungen und
- mit Hilfe der Simplexmethode

bestimmt werden. Dazu betrachten wir

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \rightarrow \min ! \quad (6.3)$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (6.5)$$

und nehmen  $\mathbf{b} \geq \mathbf{0}$  an. Das kann immer durch Multiplikation der entsprechenden Gleichungen mit einer negativen Zahl erreicht werden. Dem Problem (6.3) – (6.5) wird die Hilfsaufgabe

$$\sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min ! \quad (6.6)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i, \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.7)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, m+n \quad (6.8)$$

zugeordnet. Die Variablen  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  heißen künstliche Variablen. Zur Bestimmung der ersten zulässigen Basislösung von (6.3) – (6.5) wird eine Zweiphasenmethode verwendet:

- 1. Phase. Wähle als erste zulässige Basislösung für (6.6) – (6.8)  $x_i = 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $x_{n+i} = b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .
- 2. Phase. Löse (6.6) – (6.8) mit der Simplexmethode.

Es stellt sich nun die Frage, ob man auf diesem Wege schließlich eine erste zulässige Basislösung für (6.3) – (6.5) erhält.

Im nächsten Satz wird gezeigt, dass die Lösung von (6.6) – (6.8) nicht ausgeartet ist.

**Lemma 6.3** *Unter der Annahme, dass (6.6) – (6.8) keine ausgearteten Basislösungen besitzt, liefert die Simplexmethode nach endlich vielen Schritten eine optimale Lösung des linearen Optimierungsproblems (6.6) – (6.8).*

**Beweis:** Da Ausartung per Annahme ausgeschlossen ist, kann kein Basiszyklus auftreten. Es ist dann nur noch die Beschränktheit von unten der Zielfunktion (6.6) über (6.7) bis (6.8) zu zeigen. Das ist offensichtlich, da (6.6) eine Summe nichtnegativer reeller Zahlen ist, die durch Null nach unten beschränkt ist. ■

Nun wird eine Bedingung angegeben, mit welcher man aus dem Optimum des Hilfsproblems (6.6) – (6.8) eine erste zulässige Basislösung von (6.3) – (6.5) erhält.

**Satz 6.4** *Sei  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  eine Optimallösung der künstlichen Aufgabe (6.6) – (6.8) mit dem zugehörigen Zielfunktionswert  $\tilde{z}_0$ . Gilt  $\tilde{z}_0 = 0$ , so sind die ersten  $n$  Komponenten von  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  eine zulässige Basislösung der Aufgabe (6.3) – (6.5). Gilt jedoch  $\tilde{z}_0 > 0$ , so besitzt (6.3) – (6.5) keine zulässige Basislösung.*

**Beweis:** Aus  $\tilde{z}_0 = 0$  folgt  $x_{n+i} = 0, i = 1, \dots, m$ , das heißt im Optimum verschwinden alle künstlichen Variablen. Also hat  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  die Gestalt

$$\tilde{\mathbf{x}}_0 = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_m)^T.$$

Da  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  mit der Simplexmethode konstruiert wurde, folgt dass  $\tilde{\mathbf{x}}_0$  eine zulässige Basislösung von (6.3) – (6.5) ist.

Sei nun  $\tilde{z}_0 > 0$ . Der Beweis wird indirekt geführt, das heißt, wir nehmen an, dass (6.3) – (6.5) die zulässige Basislösung  $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)^T$  besitzt. Dann besitzt jedoch (6.6) – (6.8) die zulässige Basislösung  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, 0, \dots, 0)^T$  mit dem zugehörigen Zielfunktionswert (6.6)  $\bar{z} = 0$ . Das ist im Widerspruch zur Annahme dass  $\tilde{z}_0$  der minimale Wert ist. ■

4. Fall. Die M-Methode. Es wird das lineare Optimierungsproblem (6.3) – (6.5) betrachtet und diesem die folgende Hilfsaufgabe zugeordnet

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j + M \sum_{i=1}^m x_{n+i} \rightarrow \min ! \quad (6.9)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i \quad i = 1, \dots, m, \quad (6.10)$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \quad (6.11)$$

Bei dieser Aufgabe muss der Straffaktor  $M > 0$  hinreichend groß gewählt werden, damit im Optimum die Variablen  $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$  verschwinden. Das Problem besteht darin, dass man im allgemeinen nicht von vornherein festlegen kann, wie groß  $M$  zu wählen ist. Möglich sind Aussagen folgender Gestalt:

**Satz 6.5** *Es existiert ein  $M_0 > 0$ , so dass für alle  $M > M_0$  aus der Lösbarkeit von (6.3) – (6.5) die Lösbarkeit von (6.9) – (6.11) mit  $x_{n+1} = \dots = x_{n+m} = 0$  folgt.*

**Beweis:** Siehe Literatur. ■

Der Vorteil der M-Methode im Vergleich zur Herangehensweise von Fall 3 wird mit folgendem Satz beschrieben.

**Satz 6.6** *Falls (6.9) – (6.11) eine Lösung*

$$\tilde{\mathbf{x}} = (x_1, \dots, x_n, \underbrace{0, \dots, 0}_m)^T.$$

*besitzt, so ist  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  bereits eine Optimallösung von (6.3) – (6.5).*

**Beweis:** Siehe Literatur. ■

# Kapitel 7

## Zur Ausartung

Nach Definition 3.4 liegt Ausartung dann vor, wenn mindestens eine der Variablen  $x_i, i = 1 \dots, m$ , einer zulässigen Basislösung verschwindet. Das dahinterliegende Problem ist, dass die Zuordnung Ecke – zulässige Basislösung nicht eindeutig ist. Eine Ecke des Polyeders kann Basislösung zu verschiedenen Basen sein. Das kann aber nur bei ausgearteten Basislösungen auftreten. Aus der Ausartung einer zulässigen Basislösung folgt jedoch nicht unbedingt, dass zu der entsprechenden Ecke mehr als eine zulässige Basislösung gehört.

**Beispiel 7.1** Betrachte das lineare Programm mit

$$z = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min !, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der einzige Extrempunkt ist  $\mathbf{x} = (0, 0, 1)^T$ . Zulässige Basen sind

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Der Grund für die Nichteindeutigkeit der Basis besteht darin, dass es zu viele Ungleichungen gibt, die den Extrempunkt bestimmen. In diesem Beispiel ist er durch die beiden Gleichungen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gleichermaßen gegeben. Das haben wir bereits in den Beispielen 3.5 (2. Teil) und 5.4 gesehen.  $\square$

In der Praxis stellt sich heraus, dass die meisten zu lösenden linearen Programme ausgeartet sind.

In der Simplexmethode ist es möglich, dass im Falle der Ausartung der zulässigen Basislösung nur ein Basiswechsel stattfindet, siehe Beispiel 5.4. Das kann zu einem unendlichen Zyklus werden, einem sogenannten Basiszyklus. Es ist jedoch möglich, Ausartung prinzipiell auszuschließen beziehungsweise einen Basiszyklus zu umgehen. Im wesentlichen gibt es dazu zwei Techniken:

- die Methode der  $\varepsilon$ -Störung,
- die lexikographische Simplexmethode.

### 7.1 Die Methode der $\varepsilon$ -Störung

Wir betrachten das lineare Optimierungsproblem

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{ \mathbf{c}^T \mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \}. \quad (7.1)$$

Sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$  eine zulässige Basislösung mit den Basisvektoren  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1 + \dots + \mathbf{a}_m x_m &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{a}_1 x_{1j} + \dots + \mathbf{a}_m x_{mj} &= \mathbf{a}_j, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben und sie  $A_B = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m)$  die Matrix der Basisvektoren. Dann betrachtet man anstelle (7.1) ein lineares Programm mit gestörten Nebenbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{x} &\rightarrow \min ! \\ A_B \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j (7.2) &= \mathbf{b} \implies \\ A_B \mathbf{x} + \sum_{j=1}^n \varepsilon^j \mathbf{a}_j &= \mathbf{a}_1 \left( x_1 + \sum_{j=1}^n x_{1j} \varepsilon^j \right) + \dots + \mathbf{a}_m \left( x_m + \sum_{j=1}^n x_{mj} \varepsilon^j \right) = \mathbf{b}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

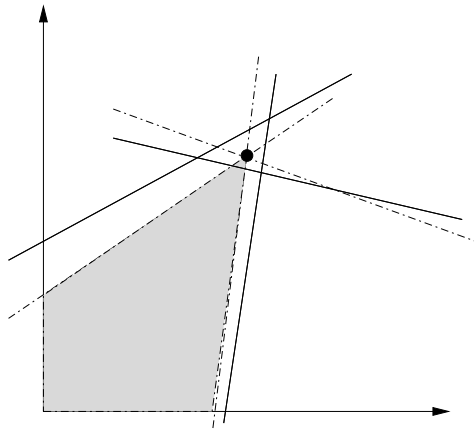
Mit den Nebenbedingungen (7.3) hat man für hinreichend kleines  $\varepsilon$  die zulässige Basislösung

$$x_i^{(\varepsilon)} := x_i + \sum_{j=1}^n x_{ij} \varepsilon^j = x_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^n x_{ij} \varepsilon^j,$$

da für  $i = 1, \dots, m$  gilt  $x_{ij} = \delta_{ij}$ . Die Eigenschaft der Basislösung folgt daraus, dass die Basis nicht geändert wurde und die Nebenbedingung in (7.3) erfüllt ist. Die Zulässigkeit folgt aus  $\varepsilon^i > 0$  und  $\varepsilon^i \gg \varepsilon^j$  für  $i < j$  und hinreichend kleines  $\varepsilon$ . Der zugehörige Zielfunktionswert ist

$$\begin{aligned} z_0^{(\varepsilon)} &= \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{i=1}^m c_i \left( \sum_{j=1}^n x_{ij} \varepsilon^j \right) = \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^m c_i x_{ij} \right) \varepsilon^j \\ &= \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{j=1}^n z_j \varepsilon^j. \end{aligned}$$

Im Bild wird die Störung der Nebenbedingungen graphisch veranschaulicht. Im dicken Punkt schneiden sich drei Geraden. Das führt dazu, dass die Zuordnung Ecke – Basislösung nicht eindeutig ist. Man hat Ausartung. Durch die Störung der Nebenbedingungen (durchgezogene Geraden) erreicht man, dass es nur noch Schnittpunkte mit genau zwei Geraden gibt.



**Bemerkung 7.2** *Berechnung von  $\theta$ .* In der Simplexmethode benötigt man die Größe  $\theta$ , siehe (4.7). Sei  $z_k - c_k > 0$ . Dann berechnet sich  $\theta$  in der Methode der  $\varepsilon$ -Störung durch

$$\theta = \min_{i=1, \dots, m; x_{ik} > 0} \frac{x_i^{(\varepsilon)}}{x_{ik}} = \min_{i=1, \dots, m; x_{ik} > 0} \frac{x_i + \varepsilon^i + \sum_{j=m+1}^n x_{ij} \varepsilon^j}{x_{ik}}. \quad (7.4)$$

□

**Satz 7.3** *Sei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$  eine zulässige Basislösung der Originalaufgabe (7.1). Falls*

$$\theta = \min_{i=1, \dots, m; x_{ik} > 0} \frac{x_i}{x_{ik}} = 0$$

*gilt (Ausartung), dann gibt es ein  $\bar{\varepsilon} > 0$  dergestalt, dass*

$$\theta = \min_{i=1, \dots, m; x_{ik} > 0} \frac{x_i^{(\varepsilon)}}{x_{ik}} = \frac{x_l^{(\varepsilon)}}{x_{lk}} > 0 \quad \forall \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}) \quad (7.5)$$

*und der Index  $l$  ist im gestörten Problem (7.3) eindeutig bestimmt.*

**Beweis:** Aus den Vorbetrachtungen folgt  $x_i^{(\varepsilon)} > 0$  und damit  $\theta > 0$  in (7.5) für  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ .

Die Eindeutigkeit von  $l$  wird indirekt bewiesen. Sei  $l$  also nicht eindeutig bestimmt, das heißt es gibt zwei Indizes  $l_1 \neq l_2$  mit

$$\frac{x_{l_1} + \varepsilon^{l_1} + \sum_{j=m+1}^n x_{l_1 j} \varepsilon^j}{x_{l_1 k}} = \frac{x_{l_2} + \varepsilon^{l_2} + \sum_{j=m+1}^n x_{l_2 j} \varepsilon^j}{x_{l_2 k}}$$

für alle  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ . Die beiden Terme sind Polynome in  $\varepsilon$ . Diese sind genau dann gleich für alle  $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ , wenn sie in allen Koeffizienten übereinstimmen. Insbesondere müssen die Koeffizienten vor den Termen mit Potenz  $l_1$  und  $l_2$  gleich sein. Ist  $l_1 \neq l_2$ , so ist für den linken Term der Koeffizient vor  $\varepsilon^{l_1}$  ungleich Null und für den rechten Term gleich Null. Für den Koeffizienten vor  $\varepsilon^{l_2}$  gilt sinngemäß das gleiche. Diese Koeffizienten können nur dann gleich sein, wenn  $l_1 = l_2$ , im Widerspruch zur Annahme. ■

Prinzipiell kann diese Manipulation in jedem Simplexschritt durchgeführt werden und man kann damit sichern, dass  $l$  stets eindeutig bestimmt ist. Diese Vorgehensweise ist für jeden Eckpunkt des zulässigen Bereichs ausgeführt zu denken. Da die Anzahl der Eckpunkte endlich ist, erhält man folgenden Satz.

**Satz 7.4** *Zu jedem linearen Optimierungsproblem existiert bei geeigneter Wahl von  $\varepsilon \in (0, \varepsilon^*)$  ein gestörtes lineares Optimierungsproblem, so dass dieses keine ausgeartete zulässige Basislösung besitzt. Für  $\varepsilon \rightarrow 0$  konvergiert das Optimum des gestörten Problems (7.3) zum Optimum des Originalproblems (7.1).*

**Bemerkung 7.5** *Praktische Umsetzung der Methode der  $\varepsilon$ -Störung.* Trotz dieser schönen Theorie macht man das alles bei praktischen Problemen nicht. Für diese wird vorgeschlagen: Falls in einer zulässigen Basislösung wenigstens ein Wert  $x_i = 0$  bestimmt wurde, so kann  $\theta = 0$  sein. Wähle dann

$$l = \min_{x_{ik} > 0} \{i : x_i = 0\},$$

wobei  $i$  über alle Basisvariablen läuft und  $k$  der Index der festgelegten Hauptspalte ist, und transformiere mit diesem Index  $l$ . Theoretisch besteht die Gefahr eines Zyklus, in der Praxis ist das aber eher unwahrscheinlich. □

## 7.2 Die lexikographische Simplexmethode

Bei der lexikographischen Simplexmethode erfolgt die Auswahl der zu tauschenden Basisvektoren so, dass keine Wiederholungen auftreten können.

**Definition 7.6 Lexikopositiver Vektor.** Ein Vektor  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  heißt *lexikopositiv*, falls  $\mathbf{x} = (0, \dots, 0, x_i, x_{i+1}, \dots, x_m)^T$  mit  $i \geq 1$  und  $x_i > 0$ . Das heißt, die erste von Null verschwindende Komponente ist positiv. Die Schreibweise ist

$$\mathbf{x} >_l \mathbf{0}.$$

Sei  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ . Dann ist  $\mathbf{y} >_l \mathbf{x}$  genau dann, wenn  $\mathbf{y} - \mathbf{x} >_l \mathbf{0}$ .

Wir betrachten das lineare Programm (7.1) mit  $\text{rg}(A) = m$ . Sei

$$\mathbf{x}_B = (x_1, \dots, x_m, 0, \dots, 0)^T$$

eine zulässige Basislösung. Die zugehörige Matrix der Basisvektoren sei  $A_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  und die der Nichtbasisvektoren  $A_N$ . Dann sind die Zeilen der Matrix

$$(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A}) := A_B^{-1}(\mathbf{b}, A) = A_B^{-1}(\mathbf{b}, A_B, A_N) \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$$

lexikopositiv, da

$$A_B^{-1}(\mathbf{b}, A) = (\mathbf{x}_B, I_m, \bar{\mathbf{a}}_{m+1}, \dots, \bar{\mathbf{a}}_n),$$

$\mathbf{x}_B \geq \mathbf{0}$  und  $I_m$  die Einheitsmatrix des  $\mathbb{R}^{m \times m}$  ist. Falls die Basisvariablen nicht die ersten  $m$  Variablen sind, dann ordnet man sie nach vorn.

Anstelle von (4.7) wird bei der lexikographischen Simplexmethode der Index  $l$  durch

$$\theta = \min_{>_l; i=1, \dots, m, x_{ik} > 0} \frac{\mathbf{e}_i^T(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A})}{x_{ik}} =: \frac{\mathbf{e}_l^T(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A})}{x_{lk}}$$

bestimmt, wobei  $\mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^m$  der Einheitsvektor ist, der in der  $i$ -ten Komponente eine Eins hat. Das heißt, das Minimum wird bezüglich der lexikographischen Ordnung genommen. Das obige Symbol bedeutet, dass man sich wie üblich alle Einträge mit  $x_{ik} > 0$  ansieht, die zugehörigen Vektoren  $\mathbf{e}_i^T(\bar{\mathbf{b}}, \bar{A})$  bildet, durch  $x_{ik}$  dividiert und von den so erhaltenen Vektoren den lexikographisch kleinsten nimmt, um  $l$  zu bestimmen. Es gilt, siehe beispielsweise [JS04]:

- Falls  $l$  in der allgemeinen Simplexmethode (4.7) eindeutig bestimmt ist, erhält man bei der lexikographischen Simplexmethode den gleichen Index.
- Die lexikographische Simplexmethode definiert einen eindeutigen Index  $l$ . Man kann zeigen, dass eine Nichteindeutigkeit im Widerspruch zu  $\text{rg}(A) = m$  steht.
- Das Ergebnis eines lexikographischen Simplexschrittes ist wiederum eine lexikopositive Basis.
- Bei der neuen Basislösung ist entweder der Zielfunktionswert kleiner oder die Differenz der Koeffizienten der Zielfunktion der neuen und der alten Basis ist lexikopositiv. Im ersten Fall hat man die Ecke verlassen. Im zweiten Fall kann es bei weiteren lexikographischen Simplexschritten nicht passieren, dass die alte Basis noch einmal verwendet wird. Ein Basiszyklus ist ausgeschlossen.

Bei der lexikographischen Simplexmethode werden also ausgehend von einer lexikopositiven Startlösung weitere lexikopositive Lösungen erzeugt. Dieses Verfahren ist endlich. Es bricht entweder mit einer Lösung des Optimierungsproblems ab, oder es wird gefunden, dass die Zielfunktion nicht nach unten beschränkt ist. Die Anzahl der Schritte kann  $n!$  nicht übersteigen. Diese Schranke ist allerdings für größere Werte von  $n$  für die Praxis bedeutungslos.