Kapitel 4

Hauptsatz und Optimalitätskriterium der Simplexmethode

In diesem Abschnitt wird das wichtigste Verfahren zur Lösung linearer Optimierungsprobleme eingeführt – die Simplexmethode. Es existiere für

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ : \quad A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \right\}$$

eine zulässige Basislösung mit $\mathbf{x} > \mathbf{0}$.

Definition 4.1 Simplex. Ein Simplex ist die Menge aller Punkte $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le 1, \quad x_i \ge 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

$\square$

Für $n = 2$ ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,0), (1,0), (0,1)$ ein Simplex.
Bild

Das geometrische Prinzip der Simplexmethode ist wie folgt:

1. Man beginnt an einer Ecke des zulässigen Bereichs mit einer Startlösung $\mathbf{x}_1$ und dem Zielfunktionswert $z(\mathbf{x}_1)$.
2. Dann geht man entlang einer absteigenden Kante, dass heisst, bei welcher der Zielfunktionswert kleiner wird, $z(\mathbf{x}_1) > z(\mathbf{x}_2)$ zu einer sogenannten benachbarten Ecke $\mathbf{x}_2$.
3. Wiederhole Schritt 2 so lange, bis es keine absteigende Kante mehr gibt.

Wir werden später diskutieren, dass man auch Simplexschritte ausführen kann, bei denen der Zielfunktionswert gleich bleibt. In diesem Fall ist die Beschreibung des zweiten Schritts auch abzuändern, da man nicht zu einer benachbarten Ecke geht, sondern auf der gegebenen Ecke die Basis ändert. Diese Situation kann im Falle der Ausartung eintreten. Man nennt zwei Basislösungen benachbart, wenn sie sich nur in einem Basisvektor unterscheiden.

Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ eine erste zulässige Basislösung. Es gilt

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}. \tag{4.1}$$

Dabei sind $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ linear unabhängige Vektoren. Der Zielfunktionswert ist demzufolge

$$z_0 = c_1 x_1 + \ldots + c_m x_m. \tag{4.2}$$

Alle Nichtbasisvektoren $\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n$ werden durch die Basis dargestellt

$$\mathbf{a}_j = x_{1j}\mathbf{a}_1 + \ldots + x_{mj}\mathbf{a}_m, \quad j = m+1, \ldots, n. \tag{4.3}$$

Mit diesen Darstellungskoeffizienten x_{ij} werden die Hilfsgrößen

$$z_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \ldots + c_m x_{mj}, \quad j = m+1, \ldots, n, \tag{4.4}$$

eingeführt.

Satz 4.2 ***Hauptsatz der Simplexmethode.*** *Sei z_0 der Wert der Zielfunktion für die zulässige Basislösung $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$, $x_i > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Gilt für ein festes $j = k$, $j = m+1, \ldots, n$, dass $z_k - c_k > 0$, so existiert wenigstens eine zulässige Basislösung mit einem Zielfunktionswert kleiner als z_0.*

Beweis: Sei $\theta > 0$ vorerst beliebig gewählt. Man multipliziere (4.3) und (4.4) für $j = k$ mit θ und bilde (4.1) - θ (4.3) und (4.2) - θ (4.4):

$$\mathbf{a}_1 (x_1 - \theta x_{1k}) + \mathbf{a}_2 (x_2 - \theta x_{2k}) + \ldots + \mathbf{a}_m (x_m - \theta x_{mk}) + \theta \mathbf{a}_k = \mathbf{b}, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} & c_1 (x_1 - \theta x_{1k}) + c_2 (x_2 - \theta x_{2k}) + \ldots + c_m (x_m - \theta x_{mk}) + \theta c_k \\ = \quad & z_0 - \theta z_k + \theta c_k = z_0 + \theta (c_k - z_k). \end{aligned} \tag{4.6}$$

In der Gleichung (4.5) steht ein Vektor, der $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllt:

$$(x_1 - \theta x_{1k}, \ldots, x_m - \theta x_{mk}, 0, \ldots, \theta, \ldots, 0)^T.$$

Es wird in Lemma 4.3 gezeigt, dass man mit diesem Vektor eine Basislösung erhält. Man hätte eine zulässige Basislösung, wenn $x_i - \theta x_{ik} \geq 0$, $i = 1, \ldots, m$. Der zugehörige Zielfunktionswert ist durch die Gleichung (4.6) gegeben. Er ist kleiner als z_0 falls $\theta > 0$ und $z_k - c_k > 0$. ■

Unter der Annahme, dass der Hauptsatz bereits vollständig bewiesen ist, haben wir ein hinreichendes Kriterium um zu entscheiden, ob es eine zulässige Basislösung mit einem kleineren Zielfunktionswert gibt. Man benötigt jetzt noch eine Methode zur Konstruktion dieser zulässigen Basislösung. Diese erfolgt mit Hilfe von θ. Diese Größe wird definiert durch

$$\theta = \min_{i=1,\ldots,m, x_{ik}>0} \frac{x_i}{x_{ik}} =: \frac{x_l}{x_{lk}}. \tag{4.7}$$

Damit das funktioniert, brauchen wir ein $x_{ik} > 0$. Falls es kein solches x_{ik} gibt, dann folgt, dass die Zielfunktion nach unten unbeschränkt ist. Man kann nämlich in diesem Fall θ beliebig groß wählen, da stets $x_i - \theta x_{ik} \geq 0$. Aus (4.6) folgt dann, dass unter der Bedingung $c_k - z_k < 0$ die Zielfunktion unbeschränkt nach unten ist. *Fazit: Falls für ein $z_k - c_k > 0$ alle $x_{ik} \leq 0$, dann ist die Zielfunktion nicht von unten beschränkt und man breche die Simplexmethode ab.*

Wenn man Entartung ausschließt, dann ist θ eindeutig bestimmt, das heißt, das Minimum in (4.7) wird für genau einen Index l angenommen. Es gilt auch die Umkehrung, dass falls der Index l in (4.7) nicht eindeutig bestimmt ist, dann hat man Ausartung. Ausartung kann zur Folge haben, dass gilt $z(\mathbf{x}_i) = z(\mathbf{x}_{i+1}) = \ldots$. Das nennt man einen Basiszyklus.

Sei der Index l in (4.7) eindeutig bestimmt. Dann hat man

$$\begin{aligned} & \mathbf{a}_1 \left(x_1 - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{1k} \right) + \ldots + \mathbf{a}_{l-1} \left(x_{l-1} - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{l-1,k} \right) \\ + \mathbf{a}_{l+1} \left(x_{l+1} - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{l+1,k} \right) + \ldots + \mathbf{a}_m \left(x_m - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{mk} \right) + \frac{x_l}{x_{lk}} \mathbf{a}_k \quad = \quad & \mathbf{b}, \end{aligned}$$

und die neue zulässige Lösung

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \; i \neq l, \quad \hat{x}_k = \frac{x_l}{x_{lk}}. \tag{4.8}$$

Alle Komponenten sind auf Grund der Konstruktion nichtnegativ und bei Ausschluss der Entartung sogar positiv. Man hat also die Komponente x_l aus der Basisliste gestrichen und durch die Komponente x_k ersetzt.

Es gilt also, (4.8) ist eine zulässige Lösung mit einem kleineren Zielfunktionswert als die ursprüngliche Lösung. Damit bleibt nur noch die Basiseigenschaft von $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{l+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ zu prüfen.

Lemma 4.3 *Sei* $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ *ein System linear unabhängiger Vektoren und sei*

$$\mathbf{w} = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \mathbf{w}_i, \quad \mu_l \neq 0. \tag{4.9}$$

Dann ist auch $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{l-1}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_{l+1}, \ldots \mathbf{w}_m\}$ *ein System linear unabhängiger Vektoren.*

Beweis: Indirekter Beweis. Sei $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{l-1}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_{l+1}, \ldots \mathbf{w}_m\}$ kein System linear unabhängiger Vektoren. Dann gibt es Zahlen $\alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}, \alpha_{l+1}, \ldots, \alpha_m, \alpha$, von denen wenigstens eine ungleich Null ist, so dass

$$\sum_{i=1, i\neq l}^{m} \alpha_i \mathbf{w}_i + \alpha \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

In diese Gleichung wird (4.9) eingesetzt. Es folgt

$$\sum_{i=1, i\neq l}^{m} (\alpha_i + \alpha \mu_i) \mathbf{w}_i + \alpha \mu_l \mathbf{w}_l = \mathbf{0}.$$

Die Vektoren $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ sind linear unabhängig, das heißt, alle Koeffizienten in dieser Gleichung müssen Null sein. Wegen $\mu_l \neq 0$ folgt dann $\alpha = 0$ und daraus $\alpha_i = 0$ für alle i. Damit ist gezeigt, dass $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{l-1}, \mathbf{w}, \mathbf{w}_{l+1}, \ldots \mathbf{w}_m\}$ ein System linear unabhängiger Vektoren ist. ■

Damit ist die Basiseigenschaft von $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l-1}, \mathbf{a}_k, \mathbf{a}_{l+1}, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ gewährleistet.

Im allgemeinen ist der Hauptsatz der Simplexmethode solange anzuwenden, wie noch wenigstens ein $z_k - c_k > 0$ ist. Dabei kann man im allgemeinen nicht erwarten, falls noch q Größen $z_j - c_j > 0$ existieren, dass man noch q Schritte auszuführen hat. Gilt für alle $z_j - c_j \leq 0$, j – Index von Nichtbasisvariablen, so ist man in dem Sinne fertig, dass der Hauptsatz nicht mehr anwendbar ist. Der Hauptsatz gibt aber bisher nur ein hinreichendes und kein notwendiges Kriterium für die Existenz einer Basislösung mit einem kleineren Zielfunktionswert. Im folgenden Satz wird gezeigt, dass das Kriterium auch notwendig ist.

Satz 4.4 ***Optimalitätskriterium.*** *Eine zulässige Basislösung* $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ *mit* $z_0(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i$ *ist optimale Basislösung, wenn für alle* $j = m+1, \ldots, n$ *gilt* $z_j - c_j \leq 0$.

Beweis: Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$. Des weiteren sei $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ eine beliebige zulässige Lösung

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_n y_n = \mathbf{b}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \tag{4.10}$$

$$\text{mit } z^* = \sum_{i=1}^{n} c_i y_i. \tag{4.11}$$

Zu zeigen ist, dass $z_0 \le z^*$ für alle $\mathbf{y}$.

Durch (4.3) ist jeder Nichtbasisvektor mit Hilfe der Basis dargestellt. Jetzt wird diese Darstellung auf die Basisvektoren ausgedehnt

$$\mathbf{a}_j = x_{1j}\mathbf{a}_1 + \ldots + x_{mj}\mathbf{a}_m, \quad j = 1, \ldots, n,$$

wobei

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}, i = 1, \ldots, m. \tag{4.12}$$

Weiter gilt die Darstellung (4.4) für z_j, $j = m+1, \ldots, n$. Mit (4.12) hat man eine analoge Darstellung für $j = 1, \ldots, m$, die sich letztlich auf $z_j = c_j$ reduziert. Zusammen mit der Voraussetzung gilt jetzt $z_j \le c_j$, $j = 1, \ldots, n$. Mit (4.11) folgt nun

$$\sum_{i=1}^{n} z_i y_i \le z^*. \tag{4.13}$$

Nun wird in (4.10) die Darstellung aller Spaltenvektoren durch die ersten m Spaltenvektoren eingesetzt

$$y_1 \sum_{i=1}^{m} x_{i1}\mathbf{a}_i + y_2 \sum_{i=1}^{m} x_{i2}\mathbf{a}_i + \ldots + y_n \sum_{i=1}^{m} x_{in}\mathbf{a}_i = \mathbf{b}.$$

Durch Umordnung nach den Basisvektoren folgt

$$\mathbf{a}_1 \sum_{j=1}^{n} y_j x_{1j} + \mathbf{a}_2 \sum_{j=1}^{n} y_j x_{2j} + \ldots + \mathbf{a}_m \sum_{j=1}^{n} y_j x_{mj} = \mathbf{b}. \tag{4.14}$$

Analog schreibt man (4.13) mit Hilfe von (4.4) und der entsprechenden Darstellung für $j = 1, \ldots, m$, mit (4.12) ($z_j = c_j$, $j = 1, \ldots, m$)

$$c_1 \sum_{j=1}^{n} y_j x_{1j} + c_2 \sum_{j=1}^{n} y_j x_{2j} + \ldots + c_m \sum_{j=1}^{n} y_j x_{mj} \le z^* \tag{4.15}$$

Der Vektor $\mathbf{x}$ ist eine zulässige Basislösung, das heißt, es gilt

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b}. \tag{4.16}$$

Da $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m\}$ eine Basis ist, ist die Darstellung von $\mathbf{b}$ mit Hilfe dieser Vektoren eindeutig. Damit folgt aus (4.14) und (4.16)

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j x_{ij}, \; i = 1, \ldots, m.$$

Setzt man dies in (4.15), so erhält man

$$z_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i x_i \le z^*.$$

■

An dieser Stelle sollen die Ergebnisse und Beobachtungen dieses Abschnitts zusammengefasst werden:

- $\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \{\mathbf{c}^T\mathbf{x} \; : \; A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \; \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ ist zu lösen.
- Man braucht eine erste Basis $A_B = (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m)$ mit der Basislösung $\mathbf{x}_B = (x_1, \ldots, x_m)^T$. Damit hat man auch einen Nichtbasisanteil $A_N = (\mathbf{a}_{m+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)$ und $\mathbf{x}_N = (x_{m+1}, \ldots, x_n)^T$. Auch der Kostenvektor wird in dieser Form zerlegt $\mathbf{c}^T = \left(\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T\right) = (c_1, \ldots, c_m, c_{m+1}, \ldots, c_n)^T$.

- Aus $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ folgt

$$A_B\mathbf{x}_B + A_N\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \implies \mathbf{x}_B = A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_N\mathbf{x}_N.$$

Dieser Ausdruck wird in die zu minimierende Zielfunktion eingesetzt

$$\mathbf{c}_B^T\left(A_B^{-1}\mathbf{b} - A_B^{-1}A_N\mathbf{x}_N\right) + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N \to \min.$$

Das heisst

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{c}_B^T A_B^{-1}\mathbf{b}}_{\text{konstant}} - \left(\mathbf{c}_B^T A_B^{-1}A_N - \mathbf{c}_N^T\right)\mathbf{x}_N \to \min.$$

- 1. Fall: $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{c}_B^T A_B^{-1}A_N - \mathbf{c}_N^T < \mathbf{0}$. Dann folgt

$$\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}_B^T A_B^{-1}\mathbf{b} - \left(\underbrace{\beta_{m+1}}_{<0} x_{m+1} + \ldots + \underbrace{\beta_n}_{<0} x_n\right) \to \min.$$

Das heißt, der Zielfunktionswert kann mit $x_i > 0$ für $i = m+1, \ldots, n$ nicht verkleinert werden. Damit hat man Optimalität erreicht.
- 2. Fall: $\mathbf{c}_B^T A_B^{-1}A_N - \mathbf{c}_N^T \leq \mathbf{0}$ und $\beta_j = 0$ für mindestens einen Index j. Dann ist das Optimum nicht eindeutig bestimmt.
- 3. Fall: $\mathbf{c}_B^T A_B^{-1}A_N - \mathbf{c}_N^T \not< \mathbf{0}$. Dann bewirkt die Aufnahme einer Nichtbasisvariablen in die Basis eine Verkleinerung der Zielfunktion. Nun ist noch die Frage zu klären, welche Nichtbasisvariable man in die Basis aufnehmen soll, falls es mehrere Indizes j mit $z_j - c_j > 0$ gibt. In diesem Falle wähle man

$$z_k - c_k = \max_{j \in \mathrm{NBV}, z_j - c_j > 0} z_j - c_j.$$

Der Index der Basisvariablen, die aus der bisherigen Basis entfernt werden soll, ist durch (4.7) gegeben.

Kapitel 5

Die Simplexmethode

Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- das untersuchte Problem ist $\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n}\left\{z=\mathbf{c}^T\mathbf{x}\ :\ \ A\mathbf{x}=\mathbf{b},\mathbf{x}\geq\mathbf{0}\right\}$,
- die erste zulässige Basislösung sei $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_m,0,\ldots,0)^T$, $\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, mit $z_0=\mathbf{c}^T\mathbf{x}$,
- die Basisvektoren sind $A_B=(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_m)$,
- die Nichtbasisvektoren sind $A_N=(\mathbf{a}_{m+1},\ldots,\mathbf{a}_n)$,
- die Darstellung der Nichtbasisvektoren durch die Basis ist

$$\mathbf{a}_j=x_{1j}\mathbf{a}_1+\ldots x_{mj}\mathbf{a}_m,\quad j=m+1,\ldots,n,$$

- die Hilfsgrößen z_j sind

$$z_j=c_1x_{1j}+c_2x_{2j}+\ldots+c_mx_{mj},\quad j=m+1,\ldots,n.$$

Diese Größen werden in der sogenannten Simplextabelle eingetragen:

			$m+1$	$m+2$	$\ldots$	k	$\ldots$	n
i	c_i	x_i	c_{m+1}	c_{m+2}	$\ldots$	c_k	$\ldots$	c_n
1	c_1	x_1	$x_{1,m+1}$	$x_{1,m+2}$	$\ldots$	$x_{1,k}$	$\ldots$	$x_{1,n}$
2	c_2	x_2	$x_{2,m+1}$	$x_{2,m+2}$	$\ldots$	$x_{2,k}$	$\ldots$	$x_{2,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
l	c_l	x_l	$x_{l,m+1}$	$x_{l,m+2}$	$\ldots$	$x_{l,k}$	$\ldots$	$x_{l,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	c_m	x_m	$x_{m,m+1}$	$x_{m,m+2}$	$\ldots$	$x_{m,k}$	$\ldots$	$x_{m,n}$
		z_0	$z_{m+1}-c_{m+1}$	$z_{m+2}-c_{m+2}$	$\ldots$	z_k-c_k	$\ldots$	z_n-c_n
Basisteil			Nichtbasisteil					

Bei der Simplexmethode folgt man jetzt im wesentlichen dem Beweis des Hauptsatzes. Sei $z_k-c_k>0$. Gilt für mehrere Indizes $j\in\{m+1,\ldots,n\}$, dass $z_j-c_j>0$, so nehme man zum Beispiel einen Index, bei dem die Differenz maximal ist

$$z_k-c_k:=\max_{j=m+1,\ldots,n,}z_j-c_j.$$

Dann liegt x_k als Nichtbasisvariable vor, die in die Basis soll. Nun bestimmt man

$$\theta=\min_{i=1,\ldots,m,x_{ik}>0}\frac{x_i}{x_{ik}}=:\frac{x_l}{x_{lk}},$$

das heißt, x_l soll aus der Basis raus.

Definition 5.1 Hauptspalte, Hauptzeile, Hauptelement, Pivotelement. Die Spalte k nennt man Hauptspalte, die Zeile l heißt Hauptzeile und das Element x_{lk} heißt Hauptelement oder Pivotelement.

Die neue Basislösung sei

$$(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{l-1}, \hat{x}_k, \hat{x}_{l+1}, \ldots, \hat{x}_m, 0, \ldots, 0)^T . \tag{5.1}$$

Nun müssen die Elemente der neuen Simplextabelle bestimmt werden:

1. Man benötigt insbesondere eine Darstellung von (5.1). Aus (4.8) erhält man

$$\hat{x}_i = x_i - \frac{x_l}{x_{lk}} x_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m; \; i \neq l; \quad \hat{x}_k = \frac{x_l}{x_{lk}}. \tag{5.2}$$

2. Aus (4.3) folgt für $j = k$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_l &= \frac{1}{x_{lk}} \left(\mathbf{a}_k - x_{1k}\mathbf{a}_1 - \ldots - x_{l-1,k}\mathbf{a}_{l-1} - x_{l+1,k}\mathbf{a}_{l+1} - \ldots - x_{mk}\mathbf{a}_m \right) \\ &= -\frac{x_{1k}}{x_{lk}}\mathbf{a}_1 - \ldots - \frac{x_{l-1,k}}{x_{lk}}\mathbf{a}_{l-1} + \frac{\mathbf{a}_k}{x_{lk}} - \frac{x_{l+1,k}}{x_{lk}}\mathbf{a}_{l+1} - \ldots - \frac{x_{mk}}{x_m}\mathbf{a}_m. \end{aligned} \tag{5.3}$$

   Damit haben wir eine Darstellung des bisherigen Basisvektors $\mathbf{a}_l$ durch die neue Basis und die neuen Elemente der alten Hauptspalte sind

$$\hat{x}_{kl} = \frac{1}{x_{lk}}, \quad \hat{x}_{il} = -\frac{x_{ik}}{x_{lk}}, \; i = 1, \ldots, m, \; i \neq k. \tag{5.4}$$

3. Für den Rest erhält man, beispielhaft an $\mathbf{a}_n$ gezeigt, die folgende Darstellung, wobei man in der ersten Gleichung die alte Basisdarstellung (4.3) nutzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_n &= x_{1n}\mathbf{a}_1 + \ldots + x_{l-1,n}\mathbf{a}_{l-1} + x_{l+1,n}\mathbf{a}_{l+1} + \ldots + x_{mn}\mathbf{a}_n + x_{ln} \underbrace{\mathbf{a}_l}_{(5.3)} \\ &= \left(x_{1n} - \frac{x_{1k}x_{ln}}{x_{lk}} \right) \mathbf{a}_1 + \ldots + \left(x_{l-1,n} - \frac{x_{l-1,k}x_{ln}}{x_{lk}} \right) \mathbf{a}_{l-1} + \frac{x_{ln}}{x_{lk}}\mathbf{a}_k \\ &\quad + \ldots + \left(x_{mn} - \frac{x_{mk}x_{ln}}{x_{lk}} \right) \mathbf{a}_m. \end{aligned}$$

   Man erhält also

$$\hat{x}_{kj} = \frac{x_{lj}}{x_{lk}}, \quad j = m+1, \ldots, n, \; j \neq k, \tag{5.5}$$

$$\hat{x}_{ij} = x_{ij} - \underbrace{\frac{x_{lj}}{x_{lk}}}_{\hat{x}_{kj}} x_{ik}, \quad i = 1, \ldots, m, \; i \neq k, \; j = m+1, \ldots, n, \; j \neq l. \tag{5.6}$$

4. Die Elemente $z_0, z_{m+1} - c_{m+1}, \ldots, z_n - c_n$ transformieren sich ebenfalls nach den obigen Regeln.

Damit sind alle Elemente der neuen Simplextabelle berechnet. Zur Berechnung von $\hat{x}_{ij}$ benötigt man die im Rechteck angeordneten Elemente x_{ij}, x_{lj}, x_{lk} und x_{ik} der alten Simplextabelle. Deshalb spricht man auch von der Rechteckregel.

Die Basisform der Simplexmethode ist wie folgt:

1. Normalform des linearen Programms herstellen.
2. erste zulässige Basislösung angeben.
3. Simplextabelle zu dieser Basislösung erstellen.
4. Existieren Bewertungen $z_j - c_j > 0$? Wenn ja, gehe zu 6.
5. Sind alle Bewertungen $z_j - c_j < 0$? Wenn ja, einzige Optimallösung gefunden, *Simplexmethode beendet.* Wenn nicht, gibt es außer negativen Bewertungen $z_j - c_j$ nur noch verschwindende, dann ist das Optimum nicht eindeutig. Man hat ein Optimum gefunden, *beende Simplexmethode.*
6. Wähle die Hauptspalte, also die Spalte, zu der das größte $z_j - c_j > 0$, $j = k$ gehört.
7. Falls $x_{ik} \leq 0$ für alle $i = 1, \dots, m$, so ist die Zielfunktion nach unten nicht beschränkt, *beende Simplexmethode.*
8. Bestimme θ zur Festlegung der Hauptzeile und des Pivotelements.
9. Basistransformation:
   - 9.1 Ersetze das Pivotelement durch seinen Kehrwert, siehe (5.4).
   - 9.2 Multipliziere die übrigen Elemente der Hauptzeile mit diesem Kehrwert, einschließlich x_l, siehe (5.2) und (5.5).
   - 9.3 Multipliziere die übrigen Elemente der Hauptspalte mit dem negativen Kehrwert, siehe (5.4).
   - 9.4 Vermindere die nicht in einer Hauptreihe stehenden Elemente, einschließlich der übrigen Werte von x_i und der letzten Zeile, um das Produkt der zugehörigen Hauptreihenelemente (Rechteckregel). Dabei nimmt man für das Pivotelement schon den neuen Wert und für die übrigen Elemente die alten Werte, siehe (5.2) und (5.6).
10. Gehe zu 4.

Beispiel 5.2 Wir betrachten das lineare Programm

$$
\begin{aligned}
z = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3 - x_4 \quad &\rightarrow \quad \min \\
\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 700 \\ 400 \\ 500 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} \quad &\geq \quad \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Bekannt sei eine erste zulässige Basislösung $x_1 = 350$, $x_4 = 25$, $x_7 = 100$, die den Zielfunktionswert $z = -1075$ besitzt. Die Basisvektoren sind demzufolge

$$
\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.
$$

Gesucht ist nun die Darstellung der Nichtbasisvektoren durch die Basisvektoren. Setze $A_B = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_7)$ und $A_N = (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5)$. Dann ist die Matrix X der Simplexkoeffizienten gesucht, für die gilt

$$
A_N = A_B X \quad \Longrightarrow \quad X = A_B^{-1} A_N.
$$

Man erhält hier

$$
X = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -3/4 & -1/4 & 1/2 \\ -2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}.
$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
z_2 &= c_1 x_{12} + c_4 x_{42} + c_7 x_{72} = -3 * 1 + (-1) * 1 + 0 * (-2) = -4, \\
z_3 &= -9/2 + 3/4 + 0 = -15/4, \\
z_5 &= -3/2 + 1/4 + 0 = -5/4, \\
z_6 &= 0 - 1/2 + 0 = -1/2
\end{aligned}
$$

und somit

$$z_2 - c_2 = -2, \quad z_3 - c_3 = 1/4, \quad z_5 - c_5 = -5/4, \quad z_6 - c_6 = -1/2.$$

Damit erhält man folgende Simplextabelle:

			2	3	5	6
i	c_i	x_i	-2	-4	0	0
1	-3	350	1	3/2	1/2	0
4	-1	25	1	-3/4	-1/4	1/2
7	0	100	-2	$\boxed{5}$	0	-1
		-1075	-2	$\boxed{1/4}$	-5/4	-1/2

Es gibt nur einen Index k mit $z_k - c_k > 0$, nämlich $k = 3$. Damit ist die Hauptspalte bestimmt (Schritt 6). Zur Bestimmung der Hauptzeile (Schritt 8) berechnet man θ:

$$\theta = \min_{x_{i3} > 0, i \in \{1,4,7\}} \left(\frac{x_i}{x_{i3}} \right) = \min \left\{ \frac{350}{3/2}, \frac{100}{5} \right\} = 20$$

für $i = 7$. Damit ist der Hauptzeilenindex $l = 7$ und das Pivotelement $x_{73} = 5$. Nun führt man die Basistransformation aus (Schritt 9):

			2	7	5	6
i	c_i	x_i	-2	0	0	0
1	-3	320	8/5	-3/10	1/2	3/10
4	-1	40	7/10	3/20	-1/4	7/20
3	-4	20	-2/5	1/5	0	-1/5
		-1080	-19/10	-1/20	-5/4	-9/20

Den neuen Wert für x_1 erhält man beispielsweise aus

$$x_1 = 350 - \frac{3}{2} 100 \frac{1}{5} = 350 - 30 = 320.$$

Da in der neuen Simplextabelle alle Werte $z_j - c_j < 0$, $j \in \{2, 5, 6, 7\}$, hat man die einzige Optimallösung bestimme: $\mathbf{x} = (320, 0, 20, 40, 0, 0, 0)^T$. $\square$

Bemerkung 5.3 Angenommen, man hat in einer Simplextabelle mehrere $z_j - c_j > 0$. Zu einer dieser Spalten mögen nur Koeffizienten $x_{ij} \leq 0$ gehören. Dann ist die Zielfunktion unbeschränkt. $\square$

Beispiel 5.4 *Zur Ausartung.* Wir betrachten das lineare Programm

$$
\begin{aligned}
z = -x_1 \quad &\to \quad \min \\
\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x} \quad &\geq \quad \mathbf{0}.
\end{aligned}
$$

Eine zulässige Basislösung, die gleichzeitig ein Optimum ist, ist $\mathbf{x} = (1,0,0,0)^T$. Wir nehmen als Basisvariablen x_1 und x_2. Da x_2 verschwindet, ist die Basislösung ausgeartet. Man hat

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhält die Simplextabelle

			3	4
i	c_i	x_i	0	0
1	-1	1	-1/3	1/3
2	0	0	4/3	-1/3
		-1	1/3	-1/3

Gemäß Simplexmethode muss x_3 in die Basis anstelle von x_2 eingeführt werden. Man erhält die Simplextabelle

			2	4
i	c_i	x_i	0	0
1	-1	1	1/4	1/4
3	0	0	3/4	-1/4
		-1	-1/4	-1/4

Damit ist das Optimalitätskriterium der Simplexmethode erfüllt und diese wird beendet. Man hat für das Optimum $\mathbf{x} = (1,0,0,0)^T$ mit diesen beiden Simplextabellen zwei unterschiedliche Basisdarstellungen. Der Zielfunktionswert hat sich im Simplexschritt nicht verändert, es wurde lediglich die Basis gewechselt. □