Teil I

Lineare Optimierung

Kapitel 1

Grundlagen

Definition 1.1 ***Lineares Optimierungsproblem, lineares Programm.*** *Eine Aufgabenstellung wird lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm genannt, wenn das Extremum einer linearen Funktion*

$$z = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{1.1}$$

zu bestimmen ist, über der durch das lineare Ungleichungssystem

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad &\le (>) \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m && (1.2) \\ x_j \quad &\ge \quad 0, \quad j = 1, \ldots, n, && (1.3) \end{aligned}$$

definierten Punktmenge. □

Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann wird die Bezeichnung

$$\mathbf{x} \ge (>) \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x_i \ge (>) y_i, \ \forall\ i = 1, \ldots, n,$$

verwendet.

Definition 1.2 ***Zulässiger Bereich.*** *Die Menge $\mathcal{M}$ aller Punkte, die das Ungleichungssystem (1.2) – (1.3) erfüllen, heißt zulässiger Bereich.* □

Beispiel 1.3 Der zulässige Bereich, der durch lineare Nebenbedingungen beschrieben ist, ist der Durchschnitt von Halbräumen. Für $n = 2$ sind das Halbebenen und ein Beispiel ist in Abbildung 1.1 zu sehen. □

Der zulässige Bereich ist nicht notwendig beschränkt. Er kann auch leer sein.

Definition 1.4 ***Konvexität.*** *Eine Punktmenge $\mathcal{M}$ heißt konvex, wenn mit beliebigem $x_1, x_2 \in \mathcal{M}$ auch alle Punkte der Gestalt*

$$\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2, \ 0 \le \lambda \le 1,$$

zu $\mathcal{M}$ gehören. □

Für den $\mathbb{R}^n$ bedeutet Konvexität, dass mit zwei Punkten $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ aus $\mathcal{M}$ auch ihre Verbindungsstrecke in $\mathcal{M}$ liegt.

Satz 1.5 *Die durch das lineare Ungleichungssystem (1.2) – (1.3) definierte Punktmenge ist konvex.*

Beweis: Seien $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ gegeben. Dann gelten

$$A\mathbf{x}_1 \le \mathbf{b},\ \mathbf{x}_1 \ge \mathbf{0},\ A\mathbf{x}_2 \le \mathbf{b},\ \mathbf{x}_2 \ge \mathbf{0}.$$

Mit $\lambda \in [0,1]$ gilt

$$\lambda A\mathbf{x}_1 \le \lambda \mathbf{b}, \quad (1-\lambda)A\mathbf{x}_2 \le (1-\lambda)\mathbf{b}.$$

Addition und Linearität der Matrizenmultiplikation ergibt

$$A\left(\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2\right) \le \mathbf{b}.$$

Analog folgt

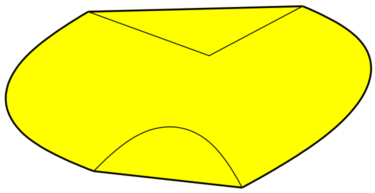
$$\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \ge \mathbf{0}.$$

■

Der Durchschnitt beliebig vieler konvexer Mengen ist wieder konvex. *Übungsaufgabe*

Definition 1.6 ***Konvexe Hülle.*** *Die kleinstmögliche konvexe Menge $\overline{\mathcal{M}}$, die eine vorgegebene Punktmenge $\mathcal{P}$ enthält, heißt deren konvexe Hülle.* □

Beispiel 1.7 Die dick umrandete Menge ist die konvexe Hülle der dünn umrandeten Menge.



□

Beispiel 1.8 Die Menge

$$\mathcal{M} = \left\{ \frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

ist nicht konvex, da sie aus diskreten Punkten besteht. Ihre konvexe Hülle ist $(0,1]$. □

Definition 1.9 ***Konvexe Linearkombination.*** *Gegeben seien q Punkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$. Betrachtet werden alle Punkte der Gestalt*

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad 0 \le \lambda_i \le 1, \quad \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1. \tag{1.4}$$

Dann heißt die mit (1.4) erklärte Menge konvexe Linearkombination der Punkte $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$. □

Welche Punkte einer konvexen Menge sollen ausgezeichnet werden?

Definition 1.10 Eckpunkt oder Extrempunkt einer konvexen Menge. Gegeben sei eine konvexe Menge $\mathcal{M}$. Der Punkt $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ heißt Eckpunkt oder Extrempunkt von $\mathcal{M}$, wenn aus $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$, $0 < \lambda < 1$, folgt $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. □

Man sagt, $\mathbf{x}$ lässt sich nicht als *echte* konvexe Linearkombination von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ darstellen.

Beispiel 1.11 Bei einem Viereck im $\mathbb{R}^2$ sind die Eckpunkte gerade die vier Ecken. Bei einer Kugel im $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, sind alle Randpunkte Eckpunkte. □

Definition 1.12 Konvexes Polyeder. Eine beschränkte Menge $\mathcal{M} \neq \emptyset$ mit endlich vielen Eckpunkten heißt konvexes Polyeder. □

Beispiel 1.13 Konvexe Polyeder in $\mathbb{R}^d, d = 1, 2, 3$. Ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^1$ ist ein abgeschlossenes Intervall. In $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ kann man sich konvexe Polyeder noch gut vorstellen. Ein Beispiel in $\mathbb{R}^2$ findet man in Abbildung 1.1. □

Satz 1.14 *Sei $\mathcal{M}$ eine konvexe, abgeschlossene und beschränkte Menge, $\mathcal{P}$ sei die Menge der Eckpunkte von $\mathcal{M}$. Dann ist $\mathcal{M}$ die konvexe Hülle von $\mathcal{P}$.*

Beweis: Literatur. Der Beweis beruht darauf, dass sich jeder Punkt $\mathbf{x}$ aus $\mathcal{M}$ als konvexe Linearkombination der Eckpunkte darstellen lässt

$$\mathbf{x} = \sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i, \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1, \quad \sum_i \lambda_i = 1.$$

Diese Darstellung nennt man bei Finite Element Methoden (FEM) auch baryzentrische Koordinaten. ■

Satz 1.15 *Ist der Lösungsbereich*

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

beschränkt, so ist er ein konvexes Polyeder.

Beweis: Siehe später, Folgerung 3.7. ■

Kapitel 2

Geometrische Deutung des Linearen Programms

In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass sich das anschauliche Merkmal des zweidimensionalen linearen Programms aus Beispiel 1.2, nämlich dass das Optimum auf dem Rand angenommen wird, verallgemeinern lässt.

Historie zur Untersuchung linearer Optimierungsprobleme:

- 1939 Leonid V. Kantorovitch (1912 – 1986); Methode der Auflösungskoeffizienten
- 1941 Frank L. Hitchcock, Transportproblem
- 1949 George Dantzig (1914 – 2005), Simplexmethode

Definition 2.1 Lineares Optimierungsproblem in 1. Normalform, lineares Programm in Normalform. Gesucht werden die Werte der n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ so, dass die lineare Funktion

$$z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \tag{2.1}$$

die sogenannte Zielfunktion, unter den Nebenbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \geq \quad b_i, \quad i = 1, \ldots, m, \quad (A\mathbf{x} \geq \mathbf{b}) \tag{2.2}$$

$$x_j \quad \geq \quad 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (\mathbf{x} \geq \mathbf{0}) \tag{2.3}$$

ein Minimum annimmt. Alle Koeffizienten sind reell. Das System (2.1) – (2.3) heißt lineares Optimierungsproblem oder lineares Programm in 1. Normalform. □

Bemerkung 2.2

1. Ob (2.1) in min– oder max–Form benutzt wird, ist im allgemeinen ohne Belang, in [JS04] wird beispielsweise die max–Form verwendet.
2. Die Relationen $\geq, =, \leq$ im System der Nebenbedingungen sind im wesentlichen äquivalent.
3. Fehlt zum Beispiel für einen Index k die Bedingung $x_k \geq 0$, so setzt man $x_k := \overline{x}_k - \hat{x}_k$ mit $\overline{x}_k, \hat{x}_k \geq 0$. Man erhöht damit die Anzahl der Variablen um Eins.

□

Definition 2.3 Zulässiger Punkt. Ein Punkt $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ heißt zulässig, wenn er die Nebenbedingungen (2.2), (2.3) erfüllt. Die Gesamtheit aller zulässigen Punkte heißt zulässiger Bereich. □

Für die Lösung von (2.1) – (2.3) kommen nur zulässige Punkte in Betracht. Der zulässige Bereich ist konvex. Ist er beschränkt, so ist er ein konvexes Polyeder. Ist der zulässige Bereich nicht beschränkt ist, dann gilt:

- entweder ist (2.1) über diesen Bereich selbst nicht beschränkt,
  Beispiel: Minimiere $-2x_1 - x_2$ im Bereich $\{(x_1, x_2) \ : \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$,
- oder (2.1) ist über dem unbeschränkten Bereich beschränkt. Dann kann man Zusatzbedingungen an den zulässigen Bereich stellen, die das Optimum nicht ändern, so dass der neue zulässige Bereich beschränkt ist.
  Beispiel: Minimiere $2x_1 + x_2$ im Bereich $\{(x_1, x_2) \ : \ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Weitere Beispiele findet man in Beispiel 2.6.

Wenn von einem konvexen Polyeder gesprochen wird, ist ab sofort immer ein abgeschlossenes konvexes Polyeder gemeint.

Satz 2.4 ***Extremwertannahme.*** *Eine auf einem konvexen Polyeder definierte lineare Funktion $z = f(\mathbf{x})$ nimmt ihren kleinsten Wert in (mindestens) einem Eckpunkt an.*

Beweis: Seien $\mathbf{x}_1, \ldots \mathbf{x}_p$ die Eckpunkte des konvexen Polyeders. Die Funktion $f(\mathbf{x})$ nehme ihr Minimum in $\mathbf{x}_0$ an, das heißt

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \tag{2.4}$$

für alle Punkte $\mathbf{x}$ des konvexen Polyeders. Dass das Minimum angenommen wird, folgt nach dem Satz von Bolzano–Weierstrass (stetige Funktion in einem kompakten Gebiet nimmt ihre Extremwerte an). Ist $\mathbf{x}_0$ kein Eckpunkt, so existiert eine Darstellung

$$\mathbf{x}_0 = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{x}_j, \ 0 \leq \lambda_j \leq 1, \ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1.$$

Aus der Linearität von f folgt

$$f(\mathbf{x}_0) = f\left(\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbf{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j f(\mathbf{x}_j).$$

Sei ein Index l definiert durch

$$f(\mathbf{x}_l) = \min_{j=1,\ldots,p} f(\mathbf{x}_j).$$

Dann folgt

$$f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x}_l) \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = f(\mathbf{x}_l). \tag{2.5}$$

Wegen (2.4) und (2.5) wird das Minimum für $\mathbf{x}_l$ angenommen. ■

Folgerung 2.5 *Wird das Minimum in mehr als einem Eckpunkt des konvexen Polyeders angenommen, so wird es auf der konvexen Hülle dieser Eckpunkte angenommen.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die Eckpunkte so numeriert, dass die Zielfunktion $f(\mathbf{x})$ ihr Minimum in den Eckpunkten $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_q$ annehme. Die konvexe Hülle dieser Eckpunkte ist

$$\left\{ \tilde{\mathbf{x}} \ : \ \tilde{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i, \ 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Aus der Linearität von f folgt

$$f(\tilde{\mathbf{x}}) = f\left(\sum_{i=1}^{q} \lambda_i \mathbf{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i f(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_1) \sum_{i=1}^{q} \lambda_i = f(\mathbf{x}_1) = \min .$$

■

Geometrische Interpretation

Die Gleichung $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} - d$ mit einer vorgegebenen Konstanten d ist die Gleichung einer Hyperebene in $\mathbb{R}^n$. Für $n = 3$, hat man beispielsweise die Normalform einer Ebenengleichung, wobei $\mathbf{c}$ ein Normalenvektor der Ebene ist.

Sei $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ die Zielfunktion. Es ist gerade

$$\mathbf{c} = \nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)^T .$$

Außerdem ist $\mathbf{c}$ orthogonal zu den Hyperebenen $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const$. Sei ein beliebiger Vektor einer Hyperebene gegeben, etwa zwischen den Punkten $\tilde{\mathbf{x}}$ und $\hat{\mathbf{x}}$, dann gilt

$$\mathbf{c}^T\tilde{\mathbf{x}} = const,\ \mathbf{c}^T\hat{\mathbf{x}} = const, \Longrightarrow \mathbf{c}^T(\tilde{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}) = 0.$$

Aus der Menge $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const$ wählen wir diejenige Hyperebene, die einen vorgegebenen Punkt $\mathbf{x}_0$, nicht notwendig einen Eckpunkt, enthält: $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0$. Wir definieren

$$g := \{\mathbf{x}\ :\ \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{c}, t \in \mathbb{R}\} .$$

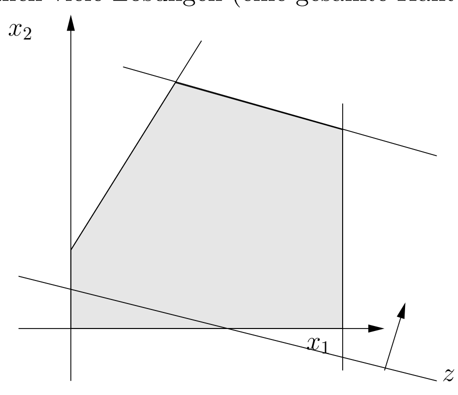
Diese Gerade enthält $\mathbf{x}_0$ und sie ist orthogonal zu $\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const$. Für alle $\mathbf{x} \in g$ gilt bezüglich der Zielfunktion

$$z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} = \mathbf{c}^T(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{c}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}_0 + t\,\|\mathbf{c}\|_2^2 =: z_0 + t\,\|\mathbf{c}\|_2^2 ,$$

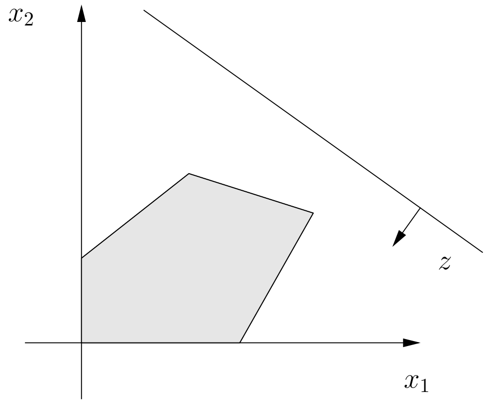
wobei z_0 der Startwert der Zielfunktion ist. Sei $t > 0$. Dann folgt $z > z_0$, das heißt, der Wert der Zielfunktion wächst streng monoton in Richtung von $\mathbf{c}$. Wenn man z zu maximieren hat, so verschiebe man die Gerade in Richtung des Gradienten. Also, ausgehend von $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ konstruiere man in Richtung von $\mathbf{c}$ eine Schar zu $\mathbf{c}^T(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ paralleler Hyperebenen mit dem Ziel, diejenige Hyperebene aus der Schar zu finden, die $\{\mathbf{x}\ :\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ berühert mit der Eigenschaft, dass $\{\mathbf{x}\ :\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\}$ ganz im negativen Halbraum der berührenden Hyperebene liegt. Berührung bedeutet, dass $\{\mathbf{x}\ :\ A\mathbf{x} \le \mathbf{b},\ \mathbf{x} \ge \mathbf{0}\} \cap \left\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} = const\right\}$ eine Teilmenge des Randes des Polyeders ist, zum Beispiel ein Eckpunkt.

Beispiel 2.6 Beispiele für Situationen die in linearen Programmen auftreten können.

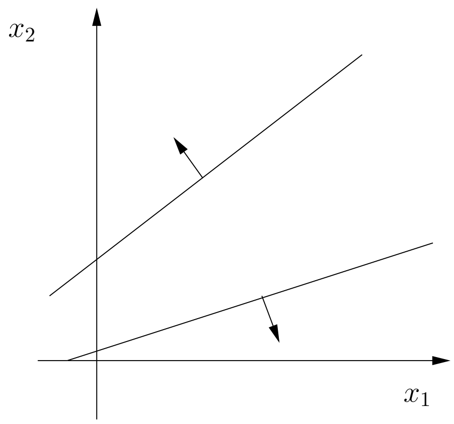
a) Es gibt unendlich viele Lösungen (eine gesamte Kante).



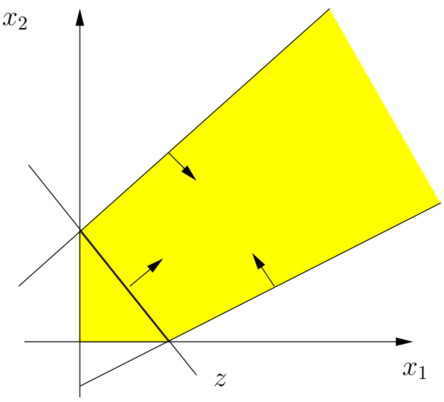
b) Es gibt überflüssig Nebenbedingungen. Die Zielfunktion nimmt ihren Extremwert in $(0, 0)$ an und die drei oberen Nebenbedingungen sind überflüssig.



c) Der zulässige Bereich ist leer.



d) Der Optimalwert ist nicht beschränkt.



Kapitel 3

Basislösungen eines linearen Programms in Normalform

Definition 3.1 Lineares Programm in 2. Normalform, einfache Normalform. Gegeben sei das lineare Programm

$$z = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \to \min ! \tag{3.1}$$

unter den folgenden Bedingungen

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.2}$$

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{3.3}$$

mit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Dieses Problem wird lineares Programm in (2.) Normalform genannt.

Bemerkung 3.2 Wenn man die lineare Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{n'} a_{i^*j} x_j \leq b_{i^*}$$

gegeben hat, so kann man eine sogenannte Schlupfvariable einführen

$$\sum_{j=1}^{n'} a_{i^*j} x_j + x_{n'+1} = b_{i^*}, \quad x_{n'+1} \geq 0.$$

Mit Hilfe der Schlupfvariablen gelingt es aus dem linearen Programm in 1. Normalform ein lineares Programm in 2. Normalform zu machen. Diese sind äquivalent. Die Kosten der Einführung von Schlupfvariablen bestehen darin, dass man die Dimension des Lösungsvektors erhöht.

Wir machen jetzt die folgenden Voraussetzungen:

1. $m < n$, das heißt weniger Nebenbedingungen als Unbekannte.
2. $\mathrm{rg}(A) = m$, das heißt, A hat vollen Zeilenrang.
3. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ sei widerspruchsfrei, das heißt, der zulässige Bereich ist nicht leer.

Definition 3.3 Basislösung. Basislösungen des linearen Programms (3.1) – (3.3) sollen die Lösungsvektoren $\mathbf{x} = (x_{i1}, \ldots, x_{im}, 0, \ldots, 0)^T$ heißen, für die die m Variablen $x_{i1}, \ldots, x_{im}$ eine nicht singuläre Koeffizientenmatrix

$$A_{m,m} = (\mathbf{a}_{i1}, \ldots, \mathbf{a}_{im})$$

besitzen, wobei $(\mathbf{a}_j)$, $j = 1, \ldots, n$, die Spaltenvektoren von A bezeichne.

Die ersten m Variablen einer Basislösung können beliebige reelle Zahlen sein.

Definition 3.4 zulässige Basislösung, ausgeartete (entartete) Basislösung. Gilt für eine Basislösung $\mathbf{x} = (x_{i1}, \ldots, x_{im}, 0, \ldots, 0)^T$, dass $x_{ij} \geq 0$ für alle $j = 1, \ldots, m$, dann heißt sie zulässig. Verschwindet sie in mindestens einer Variablen, so heißt sie ausgeartet oder entartet.

Die Komponenten einer Basislösung werden Basisvariable genannt, die zugehörigen Spaltenvektoren heißen Basisvektoren. Entsprechend spricht man von Nichtbasisvariablen und Nichtbasisvektoren.

Beispiel 3.5

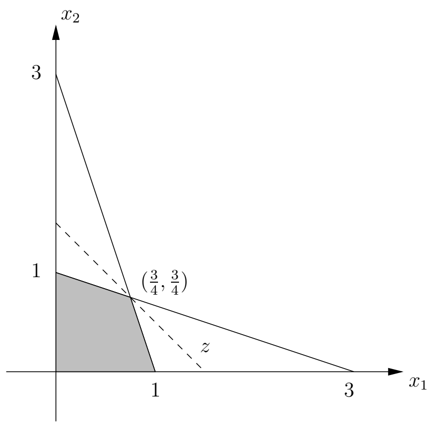
$$\begin{aligned} z = -x_1 - x_2 &\quad \to \quad \text{min !} \\ x_1 + 3x_2 + x_3 &\quad = \quad 3 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &\quad = \quad 3 \\ \mathbf{x} &\quad \geq \quad \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Zulässige, nicht ausgeartete Basislösungen sind $(i1 = 3, i2 = 4)$

$$\mathbf{x} = (0, 0, 3, 3)^T, \; A_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; z = 0.$$

oder $(i1 = 1, i2 = 2)$

$$\mathbf{x} = (3/4, 3/4, 0, 0)^T, \; A_{2,2} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, z = -\frac{3}{2}.$$



Wir führen jetzt die weitere Nebenbedingung

$$x_1 + x_2 \leq \frac{3}{2}$$

ein. Die Nebenbedingungen des erweiterten linearen Programms haben die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}.$$

Dann ist eine ausgeartete zulässige Basislösung des erweiterten linearen Programms $(i1 = 1, i2 = 2, i3 = 5)$

$$(3/4, 3/4, 0, 0, 0)^T, \; A_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \; z = -\frac{3}{2}.$$

Im Bild erkennt man, was Ausartung bedeutet. Die Ecke $(3/4, 3/4)$ des zulässigen Bereichs ist bereits durch die ersten beiden Nebenbedingungen bestimmt. Durch die neue Nebenbedingung ist diese Ecke nun wahlweise durch die ersten beiden, durch die erste und die dritte oder die zweite und die dritte Nebenbedingung bestimmt. Die Nebenbedingungen, die diese Ecke des zulässigen Bereichs bestimmen, sind nicht mehr eindeutig. □

Satz 3.6 *Ein Eckpunkt eines zulässigen Bereichs* $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \, : \, A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ *liegt genau dann vor, wenn seine Koordinaten eine zulässige Basislösung bilden.*

Beweis: *a) Aus Basislösung folgt Eckpunkt.* Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)^T$ eine zulässige Basislösung, das heißt

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_m x_m = \mathbf{b},$$

die Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ sind linear unabhängig und die Nichtbasisvariablen $x_{m+1}, \ldots, x_n$ sind gleich Null.

Der Beweis wird indirekt geführt, indem angenommen wird, dass

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$$

kein Eckpunkt ist. Dann gibt es Punkte $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{M}$ mit $\lambda \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$, $0 < \lambda < 1$. Da die letzten $n - m$ Komponenten von $\mathbf{x}$ verschwinden, muss das auch für entsprechenden Komponenten von $\mathbf{x}_1$ und $\mathbf{x}_2$ gelten, da alle Komponenten dieser Vektoren nichtnegativ sind. Seien nun

$$\mathbf{x}_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}, 0, \ldots, 0 \right)^T, \quad \mathbf{x}_2 = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}, 0, \ldots, 0 \right)^T.$$

Da diese Punkte zulässig sind, folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 x_1^{(1)} + \mathbf{a}_2 x_2^{(1)} + \ldots + \mathbf{a}_m x_m^{(1)} &= \mathbf{b}, \\ \mathbf{a}_1 x_1^{(2)} + \mathbf{a}_2 x_2^{(2)} + \ldots + \mathbf{a}_m x_m^{(2)} &= \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ folgt daraus $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$, was im Widerspruch zur Annahme steht. Also ist $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt.

b) Aus Eckpunkt folgt Basislösung. Sei $\mathbf{x}$ ein Eckpunkt des zulässigen Bereichs mit den nichtnegativen Koordinaten $x_1, \ldots, x_k$, das heißt, es gilt

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \mathbf{a}_2 x_2 + \ldots + \mathbf{a}_k x_k = \mathbf{b}, \quad x_j > 0 \text{ für } \; \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m \; j = 1, \ldots, k \leq n.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien die verschwindenden Komponenten die hinteren. Es ist zu zeigen, dass $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig sind.

Der Beweis ist wieder indirekt. Wir nehmen also an, dass es ein $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^k$ gibt mit

$$\mathbf{a}_1 y_1 + \mathbf{a}_2 y_2 + \ldots + \mathbf{a}_k y_k = \mathbf{0}$$

und mindestens einem $y_i \neq 0$. Für jede reelle Zahl μ gilt damit

$$\sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j \left(x_j + \mu y_j \right) = \mathbf{b} \quad \text{und} \quad \sum_{j=1}^{k} \mathbf{a}_j \left(x_j - \mu y_j \right) = \mathbf{b}.$$

Das bedeutet, die Punkte

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (x_1 + \mu y_1, \ldots, x_k + \mu y_k, 0, \ldots, 0), \\ \mathbf{x}_2 &= (x_1 - \mu y_1, \ldots, x_k - \mu y_k, 0, \ldots, 0) \end{aligned}$$

erfüllen die Nebenbedinungen (3.2). Falls man $\mu > 0$ hinreichend klein wählt, sind alle Komponenten dieser Punkte nichtnegativ und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ sind zulässig. Aus der Konstruktion von $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ folgt, dass $\mathbf{x} = 0.5\mathbf{x}_1 + 0.5\mathbf{x}_2$ gilt. Das ist im Widerspruch zur Eckpunktannahme von $\mathbf{x}$. Diese Darstellung für den Eckpunkt $\mathbf{x}$ kann nur existieren, wenn $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$. Da μ positiv ist, muss also $y_1 = \ldots = y_k = 0$ gelten. Also sind $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ linear unabhängig.

Die Basislösung verlangt jedoch m linear unabhängige Vektoren:

- Fall $k > m$. $m + 1$ Vektoren des $\mathbb{R}^m$ sind stets linear abhänging. Dieser Fall kann also nicht eintreten.
- Fall $k = m$. In diesem Fall besitzt die zulässige Basislösung m positiven Komponenten, sie ist also nicht ausgeartet.
- Fall $k < m$. In diesem Fall hat man eine zulässige Basislösung mit weniger als m positiven Komponenten, also eine ausgeartete Basislösung. Aus den restlichen Spalten von A konstruiert man eine Menge von linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$, für welche offensichtlich

$$\mathbf{a}_1 x_1 + \ldots + \mathbf{a}_k x_k + \mathbf{a}_{k+1} 0 + \ldots \mathbf{a}_m 0 = \mathbf{b}$$

gilt. Diese Konstruktion ist möglich, da $\operatorname{rg}(A) = m$ ist.

■

Folgerung 3.7 ***Satz 1.15.*** *Ist der Lösungsbereich*

$$\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

beschränkt, so ist er ein konvexes Polyeder.

Beweis: Man kann nur endlich viele Mengen von m linear unabhängigen Spaltenvektoren der Matrix A bilden. (*Maximalanzahl ist Übungsaufgabe*) Mit dem eben bewiesenen Satz hat damit $\mathcal{M}$ nur endlich viele Ecken. ■

Eine weitere Folgerung des eben bewiesenen Satzes, zusammen mit Satz 2.4 ist wie folgt.

Folgerung 3.8 *Eine über der Menge $\mathcal{M} = \{\mathbf{x} \ : \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ definierte lineare Funktion $z = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$ nimmt ihr Minimum für wenigstens eine zulässige Basislösung an.*

Mit Hilfe der bisherigen Resultate können wir versuchen, ein Verfahren zur Lösung von

$$\min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n} \left\{ z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \ : \ \ A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \right\}$$

zu konstruieren:

1. Aufstellung der $\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$ linearen Gleichungssysteme der Dimension m aus $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
2. Ist die so generierte Matrix $A_{m,m}$ regulär?
3. Angabe der Lösung für reguläre $A_{m,m}$.
4. Auswahl der zulässigen Lösungen
5. Bestimmung der Lösung(en), die das Minimum liefern.

Diese Herangehensweise ist jedoch schon bei relativ kleiner Anzahl von Unbekannten und Nebenbedingungen viel zu aufwendig. Zum Beispiel hätte man bei $n = 20$, $m = 10$ schon 184 756 Gleichungssysteme aufzustellen und diese zu untersuchen.

Das Ziel wird nun sein, ein Verfahren zu finden, welches einen cleveren Weg zum Optimum findet, unter Nutzung von zulässigen Basislösungen.