Kapitel 1

Einführung

Die Optimierung untersucht im Prinzip die Fragestellung: *Gesucht ist die optimale Lösung eines Problems unter irgendwelchen Bedingungen.* Die mathematische Formulierung ist: Gegeben seien Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g_i : S \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, $S \subset \mathbb{R}^n$, suche

$$f(\mathbf{x}) \to \text{Extremum unter den Bedingungen } g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \; i = 1, \ldots, m.$$

Sind alle Funktionen linear, so hat man ein Problem der linearen Optimierung.

Bei Optimierungsproblemen müssen folgende Fragestellungen untersucht werden:

- Wie lauten notwendige und hinreichende Bedingungen für die Existenz von Lösungen?
- Wie kann man Lösungen mit möglichst geringem Aufwand berechnen? Was sind die effizientesten Algorithmen?

In der Einführung werden einige typische Beispiele von Optimierungsproblemen angegeben.

Beispiel 1.1 Rundreiseproblem. Gegeben sind n verschiedene Orte O_i, $i = 1, \ldots, n$. Die Entfernung zwischen den Orten O_i und O_j sei a_{ij}. Anstelle der Entfernung können auch andere Parameter wie Kosten oder Zeit genommen werden. Man nimmt im allgemeinen auch $a_{ij} \neq a_{ji}$ an. Das Rundreiseproblem oder auch Taveling–Salesman–Problem kann nun wie folgt formuliert werden:
Ein Reisender, der in einem Ort startet, möchte alle restlichen Orte genau einmal besuchen und zum Ausgangsort zurückkehren. In welcher Reihenfolge hat er die Orte zu besuchen, damit die Gesamtlänge des Reiseweges minimal wird? $\square$

Beispiel 1.2 Landwirtschaft, Anbauoptimierung. Es stehen 100 ha Ackerland zur Verfügung, die mit Kartoffeln x_1 ha und Getreide x_2 ha bestellt werden sollen. Ein Teil der Anbaufläche kann auch brach bleiben. Die Betriebskosten sind wie folgt (GE = Geldeinheit):

	Kartoffeln	Getreide	insgesamt verfügbar
Anbaukosten GE/ha	10	20	1100 GE
Arbeitstage/ha	1	4	160 Tage
Reingewinn GE/ha	40	120	

Bei welcher Bewirtschaftung erzielt man den größten Gewinn?

Die mathematische Formulierung des Problems ist wie folgt:

$$z = 40x_1 + 120x_2 \quad \to \quad \max \tag{1.1}$$
$$10x_1 + 20x_2 \quad \leq \quad 1100 \tag{1.2}$$
$$x_1 + 4x_2 \quad \leq \quad 160 \tag{1.3}$$
$$x_1 + x_2 \quad \leq \quad 100 \tag{1.4}$$
$$x_1, x_2 \quad \geq \quad 0 \tag{1.5}$$

Diese Aufgabe kann man graphisch lösen.

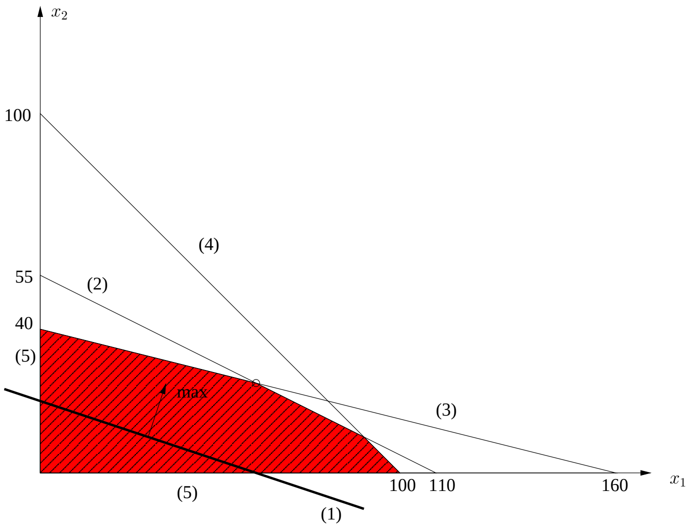

Abbildung 1.1: Darstellung der Nebenbedingungen und der Zielfunktion zum Beispiel 1.2.

Die Nebenbedingungen beschreiben Halbebenen und der Durchschnitt der Halbebenen ist gerade die Menge der Paare (x_1, x_2), in denen man das Maximum sucht. Zur graphischen Darstellung der Zielfunktion z wähle man sich einen beliebigen Punkt (x_1, x_2) und berechne die Gerade z durch diesen Punkt. In diesem Beispiel soll die Zielfunktion maximiert werden, das heißt, der Zielfunktionswert steigt, wenn man die Gerade orthogonal zu ihrem Anstieg nach oben verschiebt. Der letzte Punkt, der alle Nebenbedingungen erfüllt und der auf einer parallelen Geraden zur dargestellten Geraden liegt, ist der mit einem Kreis gekennzeichnete Punkt $(x_1, x_2) = (60, 25)$. Die Lösung dieses linearen Optimierungsproblems ist demzufolge $x_1 = 60$ ha, $x_2 = 25$ ha. □

Beispiel 1.3 Ernährungsprogramm. Es stehen die folgenden drei Nahrungsmittel zur Verfügung (alle Angaben jeweils für 100 Gramm):

	Eiweiß	Fett	Kohlenhyd.	Wasser	Preis
1. Weißbrot	8	1	49	42	10
2. Wurst	12	20	0	68	80
3. Milch	3	3	5	89	7

Ein Ernährungsprogramm wird nur zugelassen, wenn es folgende Mindestanforderungen erfüllt: Eiweiß: 90 g, Fett: 80 g, Kohlenhydrate: 500 g, Wasser 2500 g. Ziel ist es, das kostengünstigste Ernährungsprogramm zu finden, welches diese Anforderungen erfüllt. Das zugehörige Optimierungsproblem lautet:

$$
\begin{aligned}
z = 10x_1 + 80x_2 + 7x_3 &\rightarrow \min \\
8x_1 + 12x_2 + 3x_3 &\geq 90 \\
x_1 + 20x_2 + 3x_3 &\geq 80 \\
49x_1 + 5x_3 &\geq 500 \\
42x_1 + 68x_2 + 89x_3 &\geq 2500 \\
x_1, x_2, x_3 &\geq 0,
\end{aligned}
$$

wobei die Maßeinheit für x_1, x_2, x_3 hier 100 g ist.

Die (gerundete) Lösung lautet: $x_1 = 7.71$, $x_2 = 0$, $x_3 = 24.45$, also 771 g Weißbrot und 2445 g Milch, das heißt vegetarisch. Die Kosten sind rund 248 GE. □

Beispiel 1.4 Rucksackproblem. Ein Wanderer kann in seinem Rucksack ein Gesamtgewicht von N tragen. Er hat n Gegenstände, die er mitnehmen möchte und jeder Gegenstand hat einen gewissen Nutzen n_i, $i = 1, \ldots, n$. Das Gesamtgewicht aller Gegenstände übersteigt das zulässige Maximalgewicht. Das Optimierungsproblem des Wanderers besteht nun darin, eine Teilmenge von Gegenständen mit maximalem Nutzen zu finden, so dass das Gesamtgewicht dieser Teilmenge höchstens N ist. Dabei kann als zusätzliche Nebenbedingung auftreten, dass gewisse Lösungskomponenten ganzzahlig sein müssen, zum Beispiel die Anzahl der Paar Schuhe, die er mitnehmen soll. □

Beispiel 1.5 Zuordnungsproblem. In einer Firma stehen zur Fertigung von n Produkten n Maschinen zur Verfügung. Jede Maschine eignet sich zur Herstellung jedes Produktes unterschiedlich gut. Es ergeben sich je nach Zuordnung verschiedene Arbeitszeiten. Jeder Maschine soll genau ein Produkt zugeordnet werden. Das Optimierungsproblem besteht darin, die Gesamtfertigungszeit der Produkte zu minimieren. □

Bemerkung 1.6 *Operations Research.* In der Fachliteratur werden Optimierungsaufgaben oft unter dem Begriff Operations Research (Optimalplanung) geführt. □

Literaturempfehlungen sind:

- Jarre and Stoer [JS04],
- Borgwardt [Bor01],
- vor allem über das Gebiet der linearen Optimierung gibt es auch eine Reihe älterer Lehrbücher, die man verwenden kann.