Lösungen zum 11.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :

$$\mathbf{x}_k = \left(\frac{1}{\sqrt{k}}, \frac{2}{k^2}, -\frac{3}{\sqrt{k}}\right)^T, \text{ mit } \mathbf{x}_k \longrightarrow \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}, \text{ für } k \to \infty$$

Es gilt :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\|_2} = \lim_{k\to\infty} \frac{\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{x}_k\|_2} = \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt{\frac{10}{k} + \frac{4}{k^4}}\right)^{-1} \mathbf{x}_k$$

1. Komponente :

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\|\mathbf{x}_k\|_2} = \frac{1}{\sqrt{10 + \frac{4}{k^3}}} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{10}} \text{ für } k \to \infty$$

2. Komponente :

$$\frac{\frac{2}{k^2}}{\|\mathbf{x}_k\|_2} = \frac{2}{\sqrt{10k^3 + 4}} \longrightarrow 0 \text{ für } k \to \infty$$

3. Komponente :

$$\frac{-\frac{3}{\sqrt{k}}}{\|\mathbf{x}_k\|_2} = -3\frac{\frac{1}{\sqrt{k}}}{\|\mathbf{x}_k\|_2} = \frac{-3}{\sqrt{10}}$$

Man erhält also,

$$\frac{\mathbf{x}_k}{\|\mathbf{x}_k\|_2} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{für } k \to \infty.$$

2. Aufgabe :
Sei $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}$ eine Folge mit $\mathbf{x}^{(k)} \longrightarrow \mathbf{x}_0$ für $k \longrightarrow \infty$.

$$\Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{(k)} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad (x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k)})^2 = 1$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} x_1^{(k)} - 0 \\ x_2^{(k)} - 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(x_1^{(k)})^2 + ((x_2^{(k)}) - 1)^2}} \\
= \;&\lim_{k\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} x_1^{(k)} - 0 \\ x_2^{(k)} - 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{(x_1^{(k)})^2 + (\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2} - 1)^2}} \\
= \;&\lim_{k\to\infty} \frac{\begin{pmatrix} x_1^{(k)} \\ \sqrt{1-(x_1^{(k)})^2} - 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2}}}
\end{aligned}$$

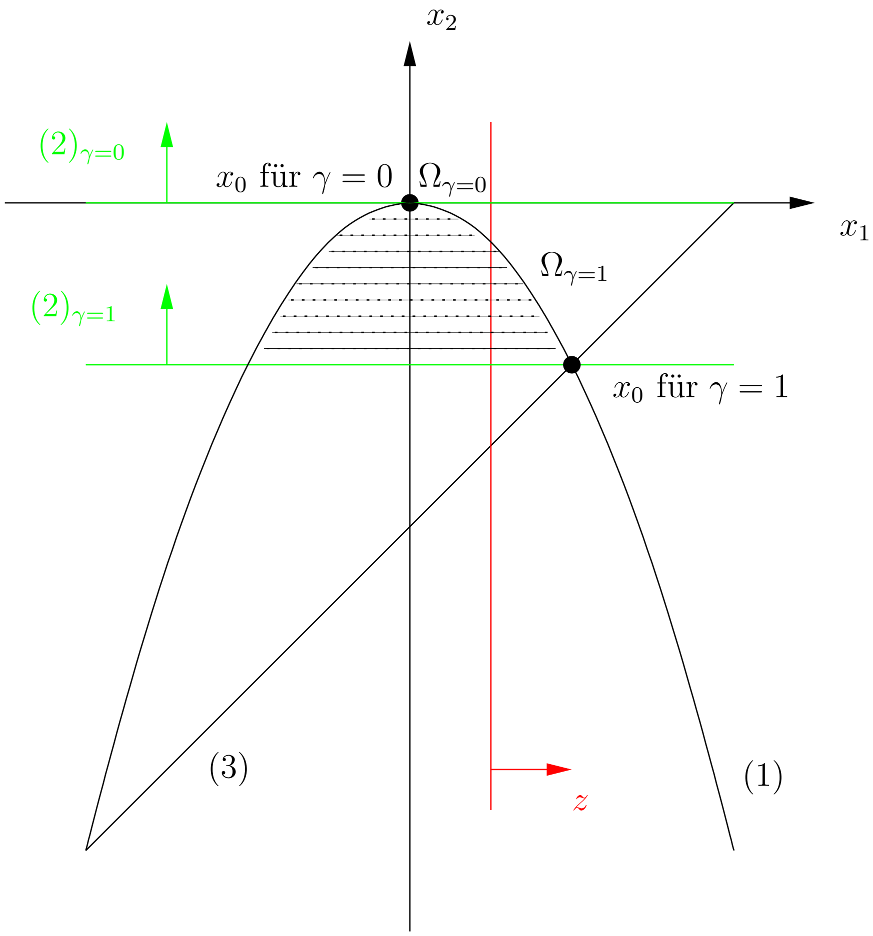
1. Komponente :

$$\begin{aligned}
\frac{x_1^{(k)}}{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2}}} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2}}{(x_1^{(k)})^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
\text{Regel von l'Hospital :} \quad & \lim_{k\to\infty} \frac{-\frac{1}{2}(1-x_1^{(k)})^{-\frac{1}{2}}(-2\,x_1^{(k)})}{2\,x_1^{(k)}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1-x_1^{(k)}}} \\
&\to \; 1 \qquad \text{für } k \to \infty
\end{aligned}$$

2. Komponente :

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2} - 1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2}}} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{(1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2})^2}{\sqrt{1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2}}}} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1-\sqrt{1-(x_1^{(k)})^2}} \\
&\longrightarrow \; 0 \quad \text{für } k \to \infty
\end{aligned}$$

3. Aufgabe :



Problem :

$$\begin{aligned} z = -x_1 &\rightarrow \min \\ x_2 &\leqslant -x_1^2 \\ x_2 &\geqslant -\gamma \\ x_2 &\geqslant x_1 - 2 \end{aligned}$$

mit $\gamma \in \{0, 1\}$

1. Fall : $\gamma = 0$

Anhand der Skizze sieht man, dass $\mathbf{x}_0 = (0,0)^T$ und $\Omega = \{(0,0)^T\}$, woraus $T(\mathbf{x}_0) = \{(0,0)^T\}$ folgt.

(1) und $(2)_{\gamma=0}$ sind aktive Nebenbedingungen, also ist $I_0 = \{1,2\}$.

$$\nabla g_{I_0}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla g_{I_0}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_{I_0}(\mathbf{x}_0)\ \mathbf{y} \ \leqslant \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y_2 \leqslant 0 \ \text{ und } \ -y_2 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad y_2 = 0$$

$$\Longrightarrow K(\mathbf{x}_0) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \neq T(\mathbf{x}_0)$$

Die Regularitätsbedingung (4.8) ist nicht erfüllt.

2. Fall : $\gamma = 1$

Anhand der Skizze sieht man, dass $\mathbf{x}_0 = (1,-1)^T$ und $T(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant y_2 \leqslant -y_1\}$ folgt.

Hier sind alle Nebenbedingungen aktiv, also ist $I_0 = \{1,2,3\}$.

$$\nabla g_{I_0}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2\,x_1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \nabla g_{I_0}(\mathbf{x}_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\nabla g_{I_0}(\mathbf{x}_0)\,\mathbf{y} \leqslant 0 \ \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} y_1 + y_2 & \leqslant & 0 \\ -y_2 & \leqslant & 0 \\ y_1 - y_2 & \leqslant & 0 \end{array} \right\} \Longrightarrow y_2 \geqslant 0$$

$$\Longrightarrow y_1 \leqslant y_2 \ \text{ und } \ y_1 \leqslant -y_2 \Longleftrightarrow y_1 \leqslant -y_1$$

$$\Longrightarrow T(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leqslant y_2 \leqslant -y_1\} = T(\mathbf{x}_0)$$

Die Regularitätsbedingung ist erfüllt.