Lösungen zum 10.Aufgabenblatt

1. Aufgabe : Gegenbeispiel
   Die Mengen

$$
\begin{aligned}
C_1 &:= \{(x_1, x_2)\,|x_2 = 0\} \\
C_2 &:= \left\{(x_1, x_2)\,|x_1, x_2 \in \ \mathrm{int}\mathbb{R}_+,\ x_2 \geqslant \frac{1}{x_1}\right\}
\end{aligned}
$$

   sind abgeschlossen und konvex, aber beide nicht kompakt. Es existiert keine Hyperebene (Gerade), die C_1 und C_2 streng trennt. Da die beiden Mengen den Voraussetzungen des ersten Trennungssatzes genügen, existiert eine Hyperebene (Gerade), die C_1 und C_2 trennt, und zwar ist dies C_1.

2. Aufgabe :
   Die Ungleichungen aus Lemma 3.14 ergeben sich (durch Umformungen) aus den Beziehungen

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_0 - \mu\mathbf{h}) &\leqslant \frac{\nu-\mu}{\nu} f(\mathbf{x}_0) + \frac{\mu}{\nu} f(\mathbf{x}_0 - \nu\mathbf{h}) \\
\Longrightarrow \frac{f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 - \mu\mathbf{h})}{\mu} &\geqslant \frac{1}{\mu}\left[f(\mathbf{x}_0) - \frac{\nu-\mu}{\nu} f(\mathbf{x}_0) - \frac{\mu}{\nu} f(\mathbf{x}_0 - \nu\mathbf{h})\right] \\
&= \frac{f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 - \nu\mathbf{h})}{\nu} \qquad\qquad \forall \mu \in (0, \nu]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_0) &\leqslant \frac{\lambda}{\lambda+\mu} f(\mathbf{x}_0 - \mu\mathbf{h}) + \frac{\mu}{\lambda+\mu} f(\mathbf{x}_0 - \lambda\mathbf{h}) \\
(\lambda+\mu) f(\mathbf{x}_0) &\leqslant \mu(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{h}) + \lambda f(\mathbf{x}_0 - \mu\mathbf{h}) \\
\lambda(f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 - \mu\mathbf{h})) &\leqslant \mu(f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)) \\
\frac{f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0 - \mu\mathbf{h})}{\mu} &\leqslant \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{x}_0 - \lambda\mathbf{h}) &\leqslant \frac{\varrho-\lambda}{\varrho} f(\mathbf{x}_0) + \frac{\lambda}{\varrho} f(\mathbf{x}_0 - \varrho\mathbf{h}) \\
\Longrightarrow \frac{f(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\lambda} &\leqslant \frac{1}{\lambda}\left[\frac{\lambda}{\varrho} f(\mathbf{x}_0 + \varrho\mathbf{h}) + \frac{\varrho-\lambda}{\varrho} f(\mathbf{x}_0) - f(\mathbf{x}_0)\right] \\
&= \frac{f(\mathbf{x}_0 + \varrho\mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{\varrho} \qquad\qquad \forall \lambda \in (0, \varrho]
\end{aligned}
$$

3. Aufgabe :
   Sei $p \in [1, \infty)$, dann gilt mit Hilfe der Minkowski-Ungleichung:

$$
\begin{aligned}
f_p(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \left(\sum_{i=1}^{n} |(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y})|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda \mathbf{x}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |(1-\lambda)\mathbf{y}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}|^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1-\lambda) \left(\sum_{i=1}^{n} |\mathbf{y}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lambda\, f_p(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\, f_p(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$

   Sei $p = \infty$, dann gilt:

$$
\begin{aligned}
f_\infty(\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) &= \max_{i=1,\ldots,n} |\lambda\, x_i + (1-\lambda)\, y_i| \\
&\leqslant \max_{i=1,\ldots,n} (\lambda\, |x_i| + (1-\lambda)\, |y_i|) \\
&\leqslant \max_{i=1,\ldots,n} \lambda\, |x_i| + \max_{i=1,\ldots,n} (1-\lambda)\, |y_i| \\
&= \lambda \max_{i=1,\ldots,n} |x_i| + (1-\lambda) \max_{i=1,\ldots,n} |y_i| \\
&= \lambda\, f_\infty(\mathbf{x}) + (1-\lambda)\, f_\infty(\mathbf{y})
\end{aligned}
$$