Lösungen zum 9.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :
   Programmieraufgabe

2. Aufgabe :
   Annahme :

$$\sigma \geqslant \frac{2}{3} \Longrightarrow 1-\sigma \leqslant \frac{1}{3}$$

$$z \;=\; y-x \;=\; \sigma-(1-\sigma) \;=\; 2\sigma-1 \;\geqslant\; \frac{2}{3}-\frac{1}{3} \;\geqslant\; \frac{1}{3} \;\geqslant\; x \Longrightarrow z \geqslant x$$

konstante Reduktion:

$$\begin{array}{lcrcl}
\frac{z}{y}=\frac{y}{1} & \Longleftrightarrow & y-x & = & y^2 \\
 & \Longleftrightarrow & \sigma-1+\sigma & = & \sigma^2 \\
 & \Longleftrightarrow & \sigma^2-2\sigma+1 & = & 0 \\
 & \Longleftrightarrow & (\sigma-1)^2 & = & 0 \\
 & \Longleftrightarrow & \sigma & = & 1 \\
 & \Longrightarrow & \text{keine Reduktion} & &
\end{array}$$

3. Aufgabe :
   Induktionsbehauptung :

$$\sigma^n = (-1)^n(F_{n-2} - F_{n-1}\sigma)\ \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{mit } \sigma^2 = 1-\sigma$$

Induktionsanfang :

$$n=0: \qquad \sigma^0 = 1 = (-1)^0(F_{-2} - F_{-1}\cdot\sigma) = (1 - 0\cdot\sigma) = 1$$

Induktionsvoraussetzung :
Die Behauptung gelte für ein festes $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt : $n \longrightarrow n+1$

$$\begin{array}{rcl}
\sigma^{n+1} & = & \sigma\cdot\sigma^n \\
 & \stackrel{\text{IV}}{=} & \sigma(-1)^n(F_{n-2} - F_{n-1}\sigma) \\
 & = & (-1)^n(\sigma F_{n-2} - F_{n-1}\sigma^2) \\
 & \stackrel{\text{Vor.}}{=} & (-1)^n(\sigma F_{n-2} - F_{n-1}(1-\sigma)) \\
 & = & (-1)^n(\sigma F_{n-2} - F_{n-1} + \sigma F_{n-1}) \\
 & = & (-1)^{n+1}(-\sigma F_{n-2} + F_{n-1} - \sigma F_{n-1}) \\
 & = & (-1)^{n+1}(F_{n-1} - \sigma(F_{n-2} + F_{n-1}) \\
 & = & (-1)^{n+1}(F_{n-1} - \sigma(F_n)
\end{array}$$

4. Aufgabe :
   Es gilt

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n+1}}{F_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}\right) \\
&= 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \\
&= 1 + \left(\lim_{n\to\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}\right)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\alpha} = 1 + \alpha \\
\Leftrightarrow\ & 1 = \alpha + \alpha^2 \\
\Rightarrow\ & \alpha = \sigma
\end{aligned}
$$