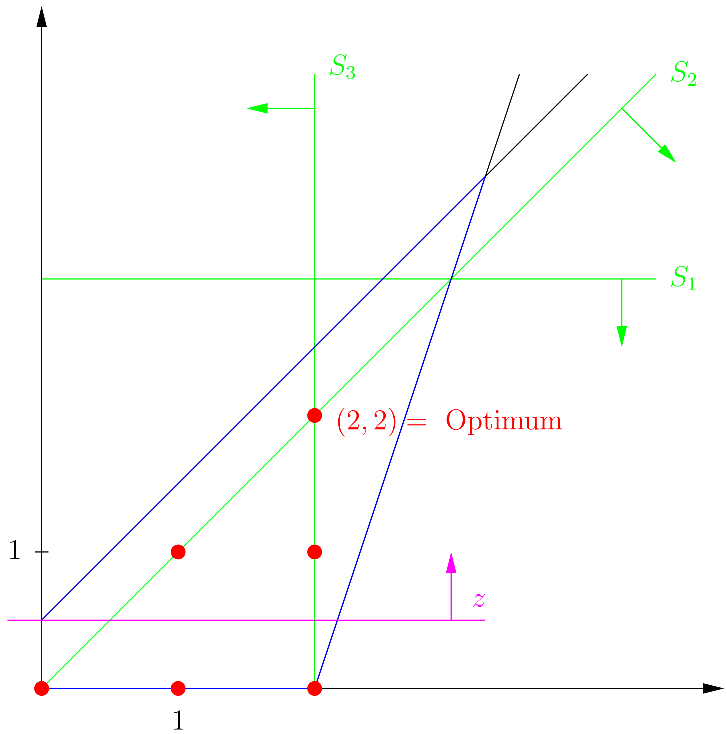
Lösungen zum 8.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :
   Der blaue Bereich ist der zulässige Bereich ohne die Ganzzahligkeitsbedingung, die roten Punkte sind die zulässigen Lösungen mit der Ganzzahligkeitsbedingung.



Wir stellen nun das duale Problem auf:

$$\begin{aligned} \tilde{z} = y_1 + 14y_2 &\quad \rightarrow \quad \max \\ -2y_1 + 7y_2 &\quad \leqslant \quad 0 \\ 2y_1 - 2y_2 &\quad \leqslant \quad -1 \\ \mathbf{y} &\quad \leqslant \quad 0 \end{aligned}$$

Aus der Skizze ist die Optimallösung bereits ablesbar, es wird die zugehörige Simplextabelle aufgestellt. Die Koeffizienten ergeben sich aus:

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow L^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

			3	4
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	-1	3.5	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$
		-3.5	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{5}$

Nach der Gomory-Methode wird die Schnittbedingung

$$s_1 = -\frac{1}{2} - \frac{7}{10}(-x_3) - \frac{1}{5}(-x_4) \geqslant 0$$

eingeführt. Aus dem Ausgangsproblem ergibt sich

$$\begin{aligned} s_1 &= -\frac{1}{2} - \frac{7}{10}(-1 - 2x_1 + 2x_2) - \frac{1}{5}(-14 + 7x_1 - 2x_2) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{7}{10} + \frac{14}{10}x_1 - \frac{14}{10}x_2 + \frac{14}{5} - \frac{7}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \\ &= 3 - x_2 \geqslant 0 \quad \textit{oder} \\ x_2 &\leqslant 3 \Longrightarrow \text{ graphische Darstellung} \end{aligned}$$

Als neue Tabelle erhalten wir

			3	4
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	3	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	−1	3.5	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{5}$
s_1	0	−0.5	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{5}$
		−3.5	$-\frac{7}{10}$	$-\frac{1}{5}$

Die dritte Zeile ist die Hauptzeile. Als Hauptspalte können wir die 1. oder die 2. Nichtbasisspalte nehmen, da in beiden $0 = 1$ gilt. Wir wählen hier die 2. Nichtbasisspalte.

			3	s_1
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	2.5	−0.5	1
2	−1	3	0	1
4	0	2.5	3.5	−5
		−3	0	−1

Mit der Gomory-Methode wird der zweite Schnitt erstellt (nach der ersten oder dritten Zeile).

$$\begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-x_3) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1 - 2x_1 + 2x_2) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + x_1 - x_2 \geqslant 0 \\ &\Longrightarrow \text{ graphische Darstellung} \end{aligned}$$

Die neue Tabelle lautet

			3	s_1
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	2.5	−0.5	1
2	−1	3	0	1
4	0	2.5	3.5	−5
s_2	0	−0.5	−0.5	0
		−3	0	−1

$\Longrightarrow$

			s_2	s_1
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	3	−1	1
2	−1	3	0	1
4	0	−1	7	−5
3	0	1	−2	0
		−3	0	−1

Die Lösung ist zwar nun ganzzahlig, aber nicht zulässig. Wir transformieren ein weiteres Mal

			s_2	4
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	$\frac{14}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	-1	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$
s_1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$
3	0	1	-2	0
		$-\frac{14}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Mit der Gomory-Methode wird ein weiterer Schnitt erstellt (erste oder zweite Zeile)

$$\begin{aligned}
s_3 &= -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}(-s_2) - \frac{1}{5}(-x_4) \\
&= -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}(x_2 - x_1) - \frac{1}{5}(7x_1 - 2x_2 - 14) \\
&= -\frac{4}{5} - \frac{2}{5}x_2 + \frac{2}{5}x_1 - \frac{7}{5}x_1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{14}{5} \\
&= 2 - x_1 \geqslant 0 \Longrightarrow \text{ graphische Darstellung}
\end{aligned}$$

Schon durch die graphische Darstellung sieht man, dass nun das Optimum des ganzzahligen LOP als Eckpunkt vorliegt.

			s_2	4
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	$\frac{14}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	-1	$\frac{14}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$
s_1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$
3	0	1	-2	0
s_3	0	$-\frac{4}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$
		$-\frac{14}{5}$	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$

Als neue Tabelle erhält man:

			s_2	s_3
i	c_i	Lsg	0	0
1	0	2	0	1
2	-1	2	1	1
s_1	0	1	-1	-1
3	0	1	-2	0
4	0	4	2	-5
		-2	-1	-1

Die nun gefundene Lösung ist ganzzahlig und optimal.
Es ist

$$\begin{array}{ll}
x_1 = 2 & s_1 = 1 \\
x_2 = 2 & s_2 = 0 \\
x_3 = 1 & s_3 = 0 \\
x_4 = 4 & \\
z = -2 &
\end{array}$$

Die Werte für die Schnittbedingungen ergeben sich ohnehin aus den Werten der x_i, $i = 1, \ldots, 4$.

2. Aufgabe :

3. Aufgabe :
   In den stationären Punkten (a,b) von f muss gelten:

$$\frac{1}{2}D_1\, f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i = 0 \quad \text{und}$$
$$\frac{1}{2}D_2\, f(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i) = 0.$$

   Man erhält daraus ein Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} a\sum x_i^2 + b\sum x_i &= \sum x_i y_i \\ a\sum x_i + b\,n &= \sum y_i. \end{aligned}$$

   Besonders einfach sind diese Formeln, wenn der Schwerpunkt im Ursprung liegt. Dann ist $\sum x_i = 0$ und $a = \frac{\sum x_i\, y_i}{\sum x_i^2}$ und $b = \frac{1}{n}\sum y_i$ sind die Koordinaten des einzigen stationären Punktes.

   Ist $\sum x_i \neq 0$, so erhält man für die gesuchten Größen a und b die Werte

$$a = \frac{n\sum x_i\, y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum y_i \sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i\, y_i}{n\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2}.$$

   Dass der Nenner von Null verschieden ist, folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung (die x_i sind paarweise verschieden).
   Bleibt noch zu zeigen, dass die einzige kritische Stelle ein Minimum ist!
   Für die zweiten Ableitungen von f erhält man:

$$D_1^2 f(a,b) = 2\sum x_i^2 > 0, \quad D_1D_2 f(a,b) = 2\sum x_i \quad \text{und} \quad D_2^2 f(a,b) = 2n.$$

   Also hat die Hesse Matrix die (nach Cauchy-Schwarz positive) Determinante,

$$\det \mathbf{H}_f(a,b) = 4\left(n\sum x_i^2 - \sum x_i \sum x_i\right) > 0.$$

   Es liegt also ein lokales Minimum vor. Dass dies auch ein globales ist, folgt wegen $f(a,b) \to \infty$ für $\|(a,b)\| \to \infty$.