Lösungen zum 7.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :

$$\Theta = \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{y} - c_k}{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_k} \qquad \text{neue Ecklösung : } \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y} - \Theta\, \mathbf{b}_l^T$$

Dann gilt für $j = m+1, \ldots, n$ und

- $j \neq k$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_j^T \bar{\mathbf{y}} - c_j &= \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} - c_j\right) - \Theta\, \mathbf{a}_j^T \mathbf{b}_l^T \\
&= \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} - c_j\right) - \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{y} - c_k}{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_k} \mathbf{b}_l \mathbf{a}_j \\
&= \left(\mathbf{a}_j^T \mathbf{y} - c_j\right) - \frac{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_j}{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_k} \left(\mathbf{a}_k^T \mathbf{y} - c_k\right) \\
&\rightarrow \quad \text{Rechteckregel}
\end{aligned}$$

- $j = k$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_l^T \bar{\mathbf{y}} - c_l &= \underbrace{\mathbf{a}_l^T \mathbf{y} - c_l}_{=0 \text{ Ecklösung}} - \frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{y} - c_k}{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_k} \underbrace{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_l}_{=1} \\
&= -\frac{\mathbf{a}_k^T \mathbf{y} - c_k}{\mathbf{b}_l \mathbf{a}_k} \\
&= -\Theta \\
&\rightarrow \quad \text{Rechteckregel}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe :

Zuerst wird das obige Problem in Normalform aufgestellt. Dabei kann die additive Konstante in der Zielfunktion bei der Rechnung vernachlässigt werden. (kann aber auch stehen bleiben). Wir untersuchen das folgende System:

$$\begin{aligned}
P : z = 2x_1 + 3x_2 &\rightarrow \min \\
x_1 + x_2 + x_3 &= 5 \\
-2x_1 + x_2 + x_4 &= -3 \\
\mathbf{x} &\geqslant 0
\end{aligned}$$

Die dazu duale Aufgabe lautet:

$$\begin{aligned}
D : \tilde{z} = 5y_1 - 3y_2 &\rightarrow \max \\
y_1 - 2y_2 &\leqslant 2 \\
y_1 + y_2 &\leqslant 3 \\
\mathbf{y} &\leqslant 0
\end{aligned}$$

Setzt man $y_1 = y_2 = 0$, so ist diese Lösung eine Ecklösung, da sie zwei der obigen Bedingungen als Gleichung erfüllt und zwei als Ungleichung. Wir erhalten folgende Simplextabelle:

			1	2
i	c_i	Lsg	2	3
3	0	5	1	1
4	0	-3	-2	1
		0	-2	-3

Die Koeffizienten im Inneren der Tabelle ergeben sich unmittelbar als Darstellungskoeffizienten der jeweiligen Bed. 1 und 2 durch 3 und 4. Die Zahlen in der Spalte Lsg erhält man mit $\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}$, $i = 3, 4$, mit $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

			4	2
i	c_i	Lsg	0	3
3	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
1	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
		3	-1	-4

Wir haben eine Optimallösung für D gefunden. In der Spalte "Lösung"haben wir die optimale Lösung von P:

$$x_1 = \frac{3}{2}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \frac{7}{2}, \quad x_4 = 0.$$

Es ist $z = 2 \cdot x_1 = 3$.
Für die ursprüngliche Aufgabe, die die gleiche Optimallösung besitzt, lautet der Zielfunktionswert 2.

3. Aufgabe :
Das duale Problem lautet :

$$\begin{aligned} D : \tilde{z} = 7y_1 + 10y_2 + y_3 + 2y_4 &\rightarrow \max \\ 3y_1 + 2y_2 + y_3 + y_4 &\leqslant 1 \\ 3y_1 + 4y_2 - 3y_3 - y_4 &\leqslant 1 \\ y_1 - y_2 - 3y_3 - y_4 &\leqslant 2 \\ y_1, y_2, y_3, -y_4 &\leqslant 0 \end{aligned}$$

$\mathbf{y} = (0, 0, 0, 1)^T$ ist eine Ecklösung.

			2	3	7
i	c_i	Lsg	1	2	0
1	1	2	-1	-1	-1
4	0	1	6	4	3
5	0	6	6	1	2
6	0	**-1**	**-2**	-2	1
		2	-2	-3	-1

$l = 6$, $\Theta = 1$ für $k = 2$

			6	3	7
i	c_i	Lsg	0	2	0
1	1	2.5	-0.5	0	-1.5
4	0	**-2**	3	**-2**	6
5	0	3	3	-5	5
2	1	0.5	-0.5	1	-0.5
		3	-1	-1	-2

$l = 4$, $\Theta = \frac{1}{2}$ für $k = 3$

			6	4	7
i	c_i	Lsg	0	0	0
1	1	2.5	-0.5	0	-1.5
3	2	1	-1.5	-0.5	-3
5	0	8	-4.5	-2.5	-10
2	1	**-0.5**	1	0.5	2.5
		4	-2.5	-0.5	-5

Das duale Programm ist unbeschränkt. Daher ist das primale Programm nicht zulässig.