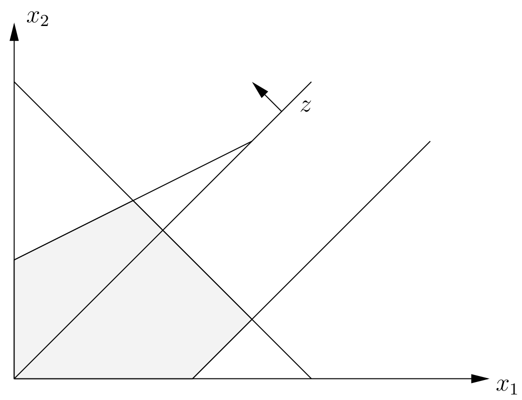
Lösungen zum 6.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :
   - beide Aufgaben besitzen ein endliches Optimum

$$
\begin{aligned}
P : z = x_1 - x_2 &\quad \rightarrow \quad \min \\
x_1 - x_2 &\quad \leqslant \quad 3 \\
x_1 + x_2 &\quad \leqslant \quad 5 \\
-x_1 + 2x_2 &\quad \leqslant \quad 4 \\
\mathbf{x} &\quad \geqslant \quad 0
\end{aligned}
$$

Die Zielfunktion hat ihr Optimum im Punkt $(0, 2)$ mit $z = -2$.

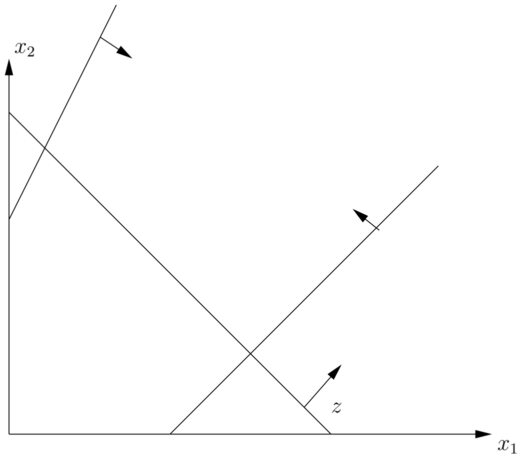


$$
\begin{aligned}
D : \tilde{z} = 3y_1 + 5y_2 + 4y_3 &\quad \rightarrow \quad \max \\
y_1 + y_2 - y_3 &\quad \leqslant \quad 1 \\
-y_1 + y_2 + 2_3 &\quad \leqslant \quad -1 \\
\mathbf{y} &\quad \leqslant \quad 0
\end{aligned}
$$

Nach dem starken Dualitätssatz besitzt D ebenfalls eine endliche Optimallösung mit dem Zielfunktionswert -2. Die letzten drei Ungleichungen folgen, wenn man in P Schlupfvariablen einführt, um neue Gleichungen zu erhalten.

- Der zulässige Bereich von P ist in Richtung der Zilefunktion unbeschränkt.

$$
\begin{aligned}
P : z = -x_1 - x_2 &\quad \rightarrow \quad \min \\
x_1 - x_2 &\quad \leqslant \quad 3 \\
-2x_1 + x_2 &\quad \leqslant \quad 4 \\
\mathbf{x} &\quad \geqslant \quad 0
\end{aligned}
$$

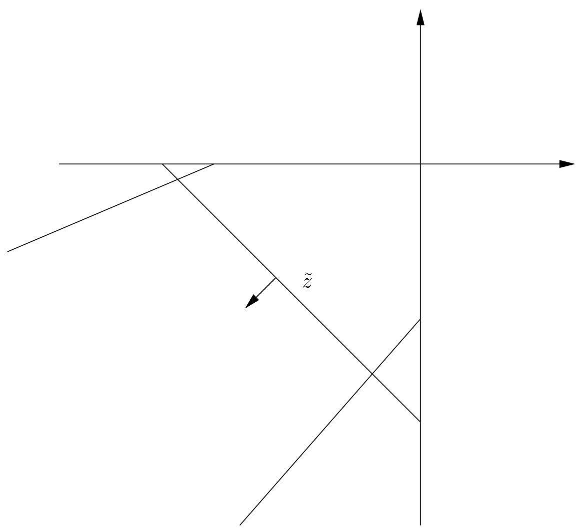


$$
\begin{aligned}
D : \tilde{z} = 3y_1 + 4y_2 &\rightarrow \max \\
y_1 - 2y_2 &\leqslant -1 \\
-y_1 + y_2 &\leqslant -1 \\
\mathbf{y} &\leqslant 0
\end{aligned}
$$

Nach Vorlesung besitzt D keine zulässige Lösung.

• Der zulässige Bereich von D ist in Richtung der Zielfunktion unbeschränkt.

$$
\begin{aligned}
D : \tilde{z} = -y_1 - y_2 &\rightarrow \max \\
y_1 - y_2 &\leqslant 3 \\
-y_1 + 2y_2 &\leqslant 4 \\
\mathbf{y} &\leqslant 0
\end{aligned}
$$



$$\begin{aligned} P: z = 3x_1 + 4x_2 &\quad\rightarrow\quad \min \\ x_1 - x_2 + x_3 &\quad=\quad -1 \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &\quad=\quad -1 \\ \mathbf{x} &\quad\geqslant\quad 0 \end{aligned}$$

Daraus folgt,

$$\begin{aligned} P: z = 3x_1 + 4x_2 &\quad\rightarrow\quad \min \\ x_1 - x_2 &\quad\leqslant\quad -1 \\ -x_1 + 2x_2 &\quad\leqslant\quad -1 \\ \mathbf{x} &\quad\geqslant\quad 0 \end{aligned}$$

Nach Vorlesung besitzt P keine zulässige Lösung.

- beide Aufgaben haben keine zulässige Lösung

$$\begin{aligned} P: z = -2x_1 - x_2 &\quad\rightarrow\quad \min \\ -2x_1 + x_2 &\quad\geqslant\quad 2 \\ 2x_1 - x_2 &\quad\geqslant\quad -1 \\ \mathbf{x} &\quad\geqslant\quad 0 \end{aligned}$$

D.h., $-2x_1 + x_2 \leqslant -1$.

$$\begin{aligned} D: \tilde{z} = 2y_1 - y_2 &\quad\rightarrow\quad \max \\ -2y_1 + 2y_2 &\quad\leqslant\quad -2 \\ y_1 - y_2 &\quad\leqslant\quad -1 \\ \mathbf{y} &\quad\geqslant\quad 0 \end{aligned}$$

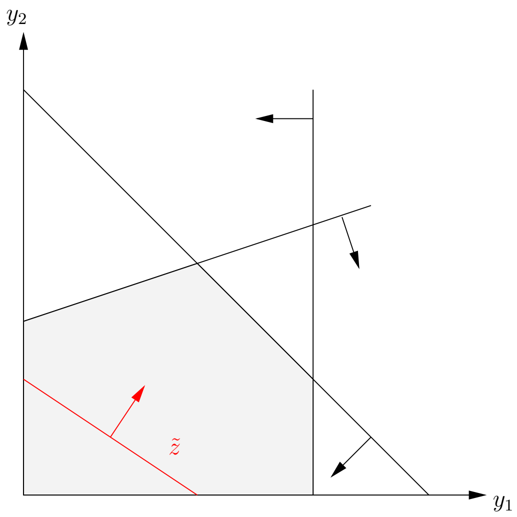
D.h., $-2y_1 + 2y_2 \geqslant 2$

2. Aufgabe :
   Zuerst wird das zum obigen System duale gebildet.

$$\begin{aligned} \tilde{z} = 2y_1 + 3y_2 &\quad\rightarrow\quad \max \\ 4y_1 + 4y_2 &\quad\leqslant\quad 28 \\ 2y_1 &\quad\leqslant\quad 10 \\ -y_1 + 3y_2 &\quad\leqslant\quad 9 \\ -\mathbf{y} &\quad\leqslant\quad 0 \end{aligned}$$

Dieses Problem ist graphisch lösbar.

$\tilde{z}$ nimmt das Optimum mit $\tilde{z} = 18$ im Punkt $(3, 4)$ an. Nach dem starken Dualitätssatz ist $z_{\min} = 18$.



Setzt man das Optimum $\eta = (3,4)$ von D in das zugehörige Nebenbedingungssystem ein, folgt dass

$$\begin{aligned} 4y_1 + 4y_2 = 4\cdot 3 + 4\cdot 4 &= 28 \text{ und} \\ -y_1 + 3y_2 = -3\cdot 1 + 3\cdot 4 &= 9 \text{ als Gleichungen und} \\ 2y_1 = 2\cdot 3 = 6 &\leqslant 10 \text{ als Ungleichung erfüllt sind.} \end{aligned}$$

Nach dem Komplementaritätssatz folgt für das Optimum $\xi = (x'_1, x'_2, x'_3)$ von P sofort $x'_2 = 0$.

Wir haben ein symmetrisches Dualproblem vorliegen. Deshalb können wir die Beziehungen des zugehörigen Komplementaritätssatzes verwenden. Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= \eta^T (A\xi - b) = (3,4)\left[\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \\ x'_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \\ &= (3,4)\left[\begin{pmatrix} 4x'_1 - x'_3 \\ 4x'_1 + 3x'_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \\ &= (3,4)\begin{pmatrix} 4x'_1 - x'_3 - 2 \\ 4x'_1 + 3x'_3 - 3 \end{pmatrix} \\ &= 12x'_1 - 3x'_3 - 6 + 16x'_1 + 12x'_3 - 12 \\ &= 28x'_1 + 9x'_3 - 18 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\eta^T A - c^T\right)\xi \\ &= \left[(3,4)\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \\ x'_3 \end{pmatrix} \\ &= \left[\begin{pmatrix} 28 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix} x'_1 \\ 0 \\ x'_3 \end{pmatrix} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Die zweite Beziehung hilft nicht weiter. Daher stellen wir die erste Beziehung nach $4x_1'$ um und setzen diese dann in das Ungleichungssystem von P ein.

$$4x_1' = \frac{18 - 9x_3'}{7}$$

und

$$4x_1' + 2x_2' - x_3' = \frac{18 - 9x_3'}{7} - x_3' \geqslant 2 \Rightarrow x_3' \leqslant \frac{1}{4}$$

sowie

$$4x_1' + 3x_3' = \frac{18 - 9x_3'}{7} + 3x_3' \Rightarrow x_3' \geqslant \frac{1}{4}$$

Es folgt $x_3' = \frac{1}{4}$ und $x_1' = \frac{9}{16}$.
Das Optimum von P ist $\xi = (\frac{9}{16}, 0, \frac{1}{4})$.

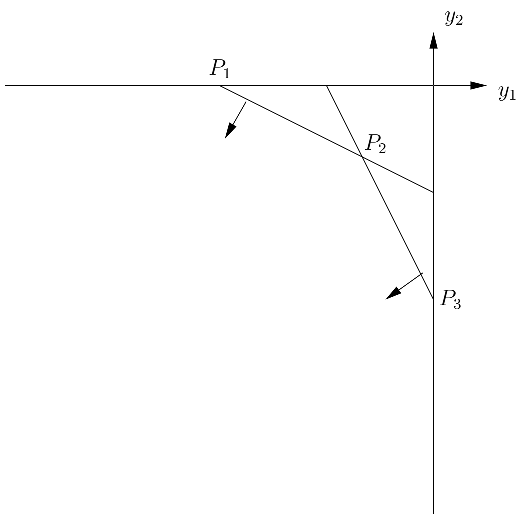
3. Aufgabe :
Wir machen aus dem obigen Problem zunächst ein LOP in Normalform,

$$\begin{array}{rcl} P : z^\star = -x_1 - x_2 & \rightarrow & \min \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & t \\ 2x_1 + x_2 + x_4 & = & 2 \\ \mathbf{x} & \geqslant & 0. \end{array}$$

und stellen das zu P duale Problem D auf,

$$\begin{array}{rcl} D : \bar{z} = t\,y_1 + 2y_2 & \rightarrow & \max \\ y_1 + 2y_2 & \leqslant & -1 \\ 2y_1 + y_2 & \leqslant & -1 \\ \mathbf{y} & \leqslant & 0 \end{array}$$

Dieses Problem ist graphisch lösbar. Der zulässige Bereich der dualen Auf-



gabe ist unbeschränkt. Falls D ein endliches Optimum besitzt, so kommen für dieses nur $P_1(-1,0)$, $P_3(0,-1)$ und $P_2(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ bzw. gegebenenfalls die Berandungen des zulässigen Bereiches in Frage.

Die Zielfunktion ist eine Gerade mit $y_2 = -\frac{t}{2}y_1 + \frac{\bar{z}}{2}$. Ist $t < 0$, dann hat diese Gerade einen positiven Anstieg. Diese Gerade würde sich immer teilweise im zulässigen Bereich befinden, die Lösungsmenge ist nicht beschränkt.

Ist $t = 0$, so ist $\bar{z} = 2y_2$ eine Zielfunktion parallel zur y_1-Achse mit Optimierungsrichtung nach oben. Diese hat als Optimum $y_2 = 0$, $-\infty < y_1 \leqslant -1$, die obere Begrenzung des zulässigen Bereiches. Es ist $\bar{z} = 0$.
Ist P_1 Optimum, so lautet $z_1 = -t$.
Ist P_2 Optimum, so lautet $z_2 = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$.
Aus dem Ansatz $z_1 > z_2$ erhält man

$$\begin{aligned} -t &> -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}t &> -\frac{2}{3} \\ t &< 1, \end{aligned}$$

also ist für $t \in (0,1)$ P_1 das Optimum und für $t = 1$ die Verbindung von P_1 und P_2.
Ist P_3 Optimum, so lautet $z_3 = -2$ und mit $z_2 > z_3$ erhält man

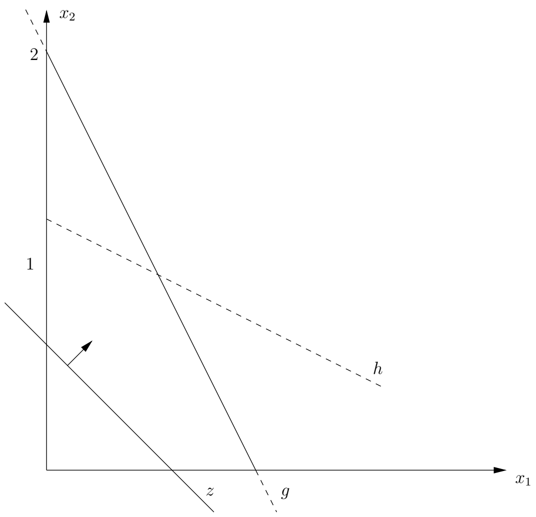
$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3} &> -2 \\ -\frac{1}{3}t &> -\frac{4}{3} \\ t &< 4 \end{aligned}$$

also ist für $t \in (1,4)$ P_2 das Optimum und für $t = 4$ die Verbindung von P_2 und P_3.
Die rechte Begrenzung ist genau dann Optimum, wenn $\bar{z}$ parallel zur y_2-Achse ist, wenn also der Koeffizient von y_2 in $\bar{z}$ Null ist; was hier aber nicht der Fall ist. Damit ist P_3 Optimum für $t \in (4,\infty)$.
Zusammenfassung:

- $t \in (-\infty,0)$ kein endliches Optimum von $\bar{z}$
- $t \in (0,1)$ Optimum: $(-1,0)$ und $\bar{z} = -t$
- $t \in (1,4)$ Optimum: $(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})$ und $\bar{z} = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}$
- $t \in (4,\infty)$ Optimum: $(0,-1)$ und $\bar{z} = -2$

$t = 1$, $t = 0$, $t = 4$ sind die jeweiligen Begrenzungen
Für P heißt das

- $t \in (-\infty,0)$ keine zulässige Lösung
- $t = 0$ $z = 0$, Optimum: $(0,0)$ - h geht durch $(0,0)$
- $t \in (0,1)$ $z^\star = -t$, $z = t$
- $t = 1$ $z^\star = -1$, $z = 1$, Optimum: $(1,0)$ - h geht durch $(1,0)$
- $t \in (1,4)$ $z^\star = -\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}z = \frac{t}{3} + \frac{2}{3}$
- $t = 4$ $z^\star = -2$, $z = 2$, Optimum: $(0,2)$ - h geht durch $(2,0)$
- $t \in (4,\infty)$ $z^\star = -2$, $z = 2$, Optimum: $(0,2)$ - h liegt über dem durch g gegebenen zulässigen Bereich



$t \in (0,1)$: $z = t \Rightarrow x_1 + 2x_2 = z + x_2 = t + x_2 \leqslant t$, also $x_2 \leqslant 0 \Rightarrow x_2 = 0$ und $x_1 = t \Rightarrow$ Optimum: $(t, 0)$

$t \in (1,4)$: $z = \frac{t}{3} + \frac{2}{3} \Rightarrow x_1 + 2x_2 = z + x_2 = x_2 + \frac{t}{3} + \frac{2}{3} \leqslant t$ also $x_2 \leqslant \frac{2}{3}t - \frac{2}{3}$ und $2x_1 + x_2 = x_1 + z = \frac{t}{3} + \frac{2}{3} + x_1 \leqslant 2$, also $x_1 \leqslant \frac{4}{3} - \frac{t}{3}$
Setzt man in beiden Fällen die Gleichheit, dann erhält man das Optimum.
Optimum: $(\frac{4}{3} - \frac{t}{3}, \frac{2}{3}t - \frac{2}{3})$