Lösungen zum 4.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :
   Die Optimierungsaufgabe lautet in Normalform:

$$\begin{aligned} z' = -3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= \min \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 + x_5 &= 4 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_6 &= 4 \\ -x_1 + 2x_3 + x_4 + x_7 &= 4 \end{aligned}$$

   Eine zulässige Basislösung ist

$$a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, a_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   mit $x_1 = 8$, $x_3 = 4$, $x_7 = 4$ und $z' = -28$.
   Daraus ergibt sich,

$$A_B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Die Simplexkoeffizienten sind

$$X = A_B^{-1} \cdot A_N = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

   Es folgt,

$$\begin{aligned} z_2 = -7 &\rightarrow z_2 - c_2 = -8 \\ z_4 = \frac{32}{3} &\rightarrow z_4 - c_4 = \frac{35}{3} \\ z_5 = -\frac{10}{3} &\rightarrow z_5 - c_5 = -\frac{10}{3} \\ z_6 = -\frac{11}{3} &\rightarrow z_6 - c_6 = -\frac{11}{3}. \end{aligned}$$

   Die Hauptspalte ist $k = 4$.
   Simplextabelle :

			2	4	5	6
i	c_i	x_i	1	-1	0	0
1	-3	8	2	-3	1	1
3	-1	4	1	$-\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
7	0	4	0	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$
		-28	-8	$\frac{35}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{11}{3}$

$$\Theta = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3 \rightarrow l = 7$$

Basistransformation :

i	c_i	x_i	2	7	5	6
			1	0	0	0
1	-3	17	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{1}{4}$
3	-1	9	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	-1	3	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
		-63	-8	$-\frac{35}{4}$	$-\frac{25}{4}$	$-\frac{3}{4}$

Dies ist die optimale Lösung, $\mathbf{x}_{opt} = (17, 0, 9, 3, 0, 0, 0)^T$ mit dem Zielfunktionswert $z'_{opt} = -63$.

2. Aufgabe :

$$z = -x_1 + 0x_2 + 3x_3 - x_4 = \min$$

Für die Normalform ergibt sich,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eine zulässige Basislösung ist

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich

$$A_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } A_N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Simplexkoeffizienten sind

$$X = A_B^{-1} \cdot A_N = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Es folgt,

$$z_3 = 1 \text{ und } z_4 = -2$$

Die Hauptspalte ist $k = 3$.
Simplextabelle :

i	c_i	x_i	3	4
			3	-1
1	-1	1	-1	2
2	0	0	6	-6
		-1	-2	-1

Das Optimum ist schon erreicht.

3. Aufgabe :
   Die Lösung steht im Skript auf Seite 28.

4. Aufgabe :
   Gegeben ist ein lineares Programm in Normalform,

$$\begin{aligned} z &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}, \\ A\mathbf{x} &= \mathbf{b}, \end{aligned}$$

wobei die Elemente von $\mathbf{c}$ aufsteigend geordnet sind.
Die Matrix A ist eine $(m \times n)-$Matrix, $m \leqslant n$, $a_{ij} \geqslant 0 \ \forall i,j$. Für A gilt, Zeilenrang = Spaltenrang, d.h. A hat m linear unabhängige Zeilen.

Zusätzlich gilt $b_i \geqslant 0 \ \forall i$.

Die Lösung $\mathbf{x}$ ist zulässig, da für die Komponenten von $\mathbf{x}$ nur positive Werte gewählt werden und die Engpassmethode zusätzlich einzelne Komponenten Null setzt, d.h. $\mathbf{x} \geqslant 0$.

Bei jedem Schritt der Engpassmethode wird ein Vektor, insgesamt höchstens m Vektoren, gewählt. Wählt man weniger als m Vektoren, füllt man mit zu diesen linear unabhängigen Vektoren auf. $\Rightarrow$ ausgeartete Startlösung

Zu zeigen bleibt, dass die ausgewählten Vektoren linear unabhängig sind.

o.B.d.A seien die Vektoren so geordnet, dass sie in aufsteigender Reihenfolge ausgewählt werden.

Sei $\mathbf{a}_1$ gewählt. Annahme, es existiert ein Vektor $\mathbf{a}_i$, mit $\mathbf{a}_i = \lambda\mathbf{a}_1$. Das bedeutet aber, dass $\mathbf{a}_i$ in diesem Schritt durch die Engpassmethode eliminiert wird.

Nun wählt man $\mathbf{a}_2$. Annahme, es existiert ein Vektor $\mathbf{a}_j = \lambda\mathbf{a}_1 + \mu\mathbf{a}_2$. Da $\mathbf{a}_2$ in der von $\mathbf{a}_1$ Null gesetzten Gleichung eine Null als Koomponente hat und $\mathbf{a}_j$ eine Linearkombination ist, muss $\mu = 0$ sein. Dann gilt $\mathbf{a}_j = \lambda\mathbf{a}_2$ und $\mathbf{a}_j$ wird in diesem Schritt eliminiert. Die Behauptung folgt nun induktiv.
Da von allen ausgewählten Vektoren die linear abhängigen durch die Engpassmethode eliminiert werden, erhält man ein System linear unabhängiger Vektoren, welches gegebenenfalls noch zu einer Basis erweitert werden muss.