Lösungen zum 2.Aufgabenblatt

1. Aufgabe :
   NF :

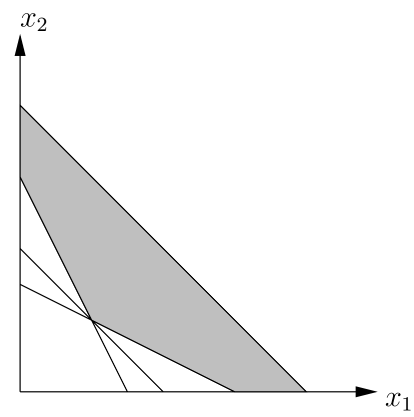
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 &= 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_6 &= 4 \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix	Lsg des GS	Lsgsvektor / Vektor (x_1, x_2)	Art der BL
$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$x_1' = -1$ $x_2' = 5$ $x_3' = 2$ $x_4' = 6$	$(-1, 5, 2, 6, 0, 0)^T$ $(-1, 5)$	nicht zulässig
$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	$x_1' = 5$ $x_2' = -1$ $x_3' = 2$ $x_4' = 6$	$(5, -1, 2, 6, 0, 0)^T$ $(5, -1)$	nicht zulässig
$\begin{matrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x_1' = 1$ $x_2' = 1$ $x_3' = 0$ $x_4' = 2$	$(1, 1, 0, 2, 0, 0)^T$ $(1, 1)$	zulässig ausgeartet
$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	Koeffizienten- matrix ist singulär		
$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x_1' = 1$ $x_2' = 1$ $x_3' = 0$ $x_4' = 2$	$(1, 1, 0, 2, 0, 0)^T$ $(1, 1)$	zulässig ausgeartet
$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x_1' = 1$ $x_2' = 1$ $x_3' = 0$ $x_4' = 2$	$(1, 1, 0, 2, 0, 0)^T$ $(1, 1)$	zulässig ausgeartet
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$x_1' = 4$ $x_2' = 2$ $x_3' = 1$ $x_4' = 5$	$(4, 2, 1, 5, 0, 0)^T$ $(4, 0)$	zulässig
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x_1' = 1.5$ $x_2' = -0.5$ $x_3' = -1.5$ $x_4' = 2.5$	$(1.5, -0.5, -1.5, 2.5, 0, 0)^T$ $(1.5, 0)$	nicht zulässig

Koeffizientenmatrix	Lsg des GS	Lsgsvektor / Vektor (x_1, x_2)	Art der BL
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x'_1 = 3$ $x'_2 = 1$ $x'_3 = 3$ $x'_4 = 1$	$(3, 1, 3, 1, 0, 0)^T$ $(3, 0)$	zulässig
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x'_1 = 2$ $x'_2 = -1$ $x'_3 = 1$ $x'_4 = 2$	$(2, -1, 1, 2, 0, 0)^T$ $(2, 0)$	nicht zulässig
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$	$x'_1 = 4$ $x'_2 = 2$ $x'_3 = 5$ $x'_4 = 1$	$(4, 2, 5, 1, 0, 0)^T$ $(0, 4)$	zulässig
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x'_1 = 3$ $x'_2 = 1$ $x'_3 = 3$ $x'_4 = 1$	$(3, 1, 3, 1, 0, 0)^T$ $(0, 3)$	zulässig
$\begin{matrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x'_1 = 1.5$ $x'_2 = -0.5$ $x'_3 = -1.5$ $x'_4 = 2.5$	$(1.5, -0.5, -1.5, 2.5, 0, 0)^T$ $(0, 1.5)$	nicht zulässig
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	$x'_1 = 2$ $x'_2 = 1$ $x'_3 = -1$ $x'_4 = 2$	$(2, 1, -1, 2, 0, 0)^T$ $(0, 2)$	nicht zulässig
$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{matrix}$	$x'_1 = -2$ $x'_2 = -3$ $x'_3 = -3$ $x'_4 = 4$	$(-2, -3, -3, 4, 0, 0)^T$ $(0, 0)$	nicht zulässig



2. Aufgabe :
   Es sei m_1 eine nichttriviale Lösung des homogenen Systems.
   Dann ist
   $$A\,m_1 \leqslant 0 \qquad m_1 \geqslant 0$$
   Für alle $y \in \mathbb{R}_+$ gilt dann
   $$y\,A\,m_1 \leqslant y\,0 \qquad \text{oder} \qquad A\,\underbrace{(y\,m_1)}_{m^*} \leqslant 0$$
   d.h., existiert eine nichttriviale Lösung des homogenen Systems, so existieren unendlich viele, die beliebig groß sein können, da y beliebig gewählt werden kann. Aus $A\,m^* \leqslant 0$ folgt $A\,m^* \leqslant b$ für $b \geqslant 0$. Dann ist
   $$A\,m^* + A\,m^* \leqslant 0 + b \iff 2A\,m^* \leqslant b$$
   Da die Menge der Lösungen des homogenen Ungleichungssystems schon unbeschränkt ist und die obige Beziehung für alle Lösungen des homogenen Ungleichungssystems gilt, so ist auch die Menge der Lösungen für das inhomogene Ungleichungssystem unbeschränkt.

   Die Menge $\mathcal{M}$ sei unbeschränkt.
   Es gilt,
   $$0 \in \mathcal{M}, \text{ da } A\,0 = 0 \leqslant b.$$
   Da $\mathcal{M}$ konvex ist, existiert für alle $x \in \mathcal{M}$ eine Gerade von 0 zu x, $g = \lambda\mathbf{t}$, mit $\mathbf{t} \geqslant 0$ fest, $\mathbf{t} \neq \mathbf{0}$ und $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   Da $\mathcal{M}$ unbeschränkt ist, existiert ein x mit $\|x\|_2 \geqslant C$, d.h. es existiert eine Gerade g mit $\lambda \in [0, \infty)$.
   Für diese Gerade gilt, da die in $\mathcal{M}$ liegt,
   $$\begin{aligned} A\,(\lambda\mathbf{t}) &\leqslant \mathbf{b} \\ \lambda\,A\,(\mathbf{t}) &\leqslant \mathbf{b} \\ \underbrace{A\,\mathbf{t}}_{const.} &\leqslant \frac{\mathbf{b}}{\lambda} \qquad \text{betrachte } \lambda \to \infty \\ A\,\mathbf{t} &\leqslant \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\mathbf{b}}{\lambda} = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \mathbf{t} \text{ ist nichttriviale Lösung} \end{aligned}$$

3. Aufgabe :